

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ К. Л. ХЕТАГУРОВА
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПОРЯДКОВЫЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ:

Тезисы докладов
XIV Международной научной конференции
(с. Цей, 3–8 июля 2017 г.)

Владикавказ
2017

ББК 22.12 + 22.18
УДК 510.12

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XIV Международной научной конференции (с. Цей, 3–8 июля 2017 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2017.—217 с.

Сборник содержит тезисы докладов XIV Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (с. Цей, 3–8 июля 2017 г.), которая проведена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-31-10165.

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

Абанин А. В. Инвариантные подпространства классических операторов в весовых пространствах голоморфных функций	12
Абдусаламов Х. А., Вагабов А. И. Ряды Фурье по корневым функциям дифференциального пучка десятого порядка с пятикратными характеристиками	14
Бабич П. В., Левенштам В. Б. Восстановление быстро осциллирующей правой части волнового уравнения по неполной асимптотике решения .	15
Батхин А. Б. Проблема формальной устойчивости положения равновесия системы Гамильтона	16
Бештокова З. В. Априорная оценка решения вырождающегося дифференциального уравнения параболического типа общего вида с дробной производной Римана — Лиувилля	18
Brouzet C., Dauhois T., Ermanyuk E. V., Joubaud S., Sibgatullin I. Cascades of triadic resonance instabilities in internal waves attractors	20
Ватульян А. О., Нестеров С. А. Неоднородные материалы с покрытиями: моделирование и идентификация	21
Дробышева И. В. Индивидуально-групповые образовательные траектории обучения студентов математике	23
Дронов А. К. Интерполяция операторов, ограниченных на конусах в банаховых пространствах последовательностей	25
Иванова О. А. О свертке аналитических функционалов	26
Pin K. I., Morgulis A. B. Nonlinear waves on the Couette–Taylor flow with throughflow	28

Karn A. K. Orthogonality in C^* -algebras	30
Климентов С. Б. Изоморфизм некоторых интегро-дифференциальных и сингулярных операторов	31
Kovalevsky A. A. Variational problems with pointwise functional constraints in variable domains	32
Кусраев А. Г., Тасоев Б. Б. Представление квазибанаховых решеток ..	34
Kusraeva Z. A. Convexity conditions for the space of regular polynomials ...	36
Лапин К. С. Вектор-функции Ляпунова и ограниченность решений по Пуассону	38
Муравник А. Б. О положительных решениях некоторых квазилинейных параболических уравнений, вырождающихся на бесконечности	40
Nikonov Yu. G., Nikonova Yu. V., Chen Z. On invariant Einstein metrics on Ledger–Obata spaces	41
Raditz L. Nonlinear and quasilinear regression with ClassPad-software, using the Levenberg–Marquardt algorithm	43
Pliev M. A. Order unbounded orthogonally additive operators in vector lattices	45
Ситник С. М. Уточнения неравенств Коши — Буняковского и их приложения	46
Тавасиев Б. С. Особенности математической подготовки специалистов бизнес-информатики	48

СЕКЦИЯ I

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Абасов Н. М. Теорема Иосиды — Хьюитта для мажорируемых операторов Урысона	51
Abiev N. A. On evolution of invariant Riemannian metrics on some generalized Wallach spaces	53
Андреева Т. М. Критерий сюръективности операторов свертки на весовых пространствах аналитических функций в выпуклых ограниченных областях	55
Балашенко В. В., Радиванович О. Н. Левоинвариантные структуры на специальных обобщенных группах Гейзенберга	57

Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю. Экстремальные свойства суммируемых аналитических функций	59
Гаджимирзаев Р. М. Рекуррентные соотношения для полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных полиномами Лагерра	60
Гарифьянов Ф. Н., Стрежнева Е. В. О некоторых разностных операторах и их приложениях к проблеме моментов	62
Золотых С. А., Стукопин В. А. Асимптотика собственных значений больших ленточных тёплицевых матриц специального вида	64
Калиниченко А. В. Модульные полуторалинейные отображения и обобщенное представление Стайнспринга	66
Каплицкий В. М. Оценки скорости убывания собственных функций интегральных операторов в неограниченных областях и их применения в статистической механике	67
Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В. Двойственность конформно-плоских метрик	69
Магомед-Касумов М. Г. Приближение кусочно гладких функций тригонометрическими суммами Фурье и средними Валле Пуссена	70
Мелихов С. Н. Интерполирующая функция А. Ф. Леонтьева и инвариантные подпространства обобщенного сдвига влево	72
Муратов М. А., Пашкова Ю. С., Чилин В. И. Максимальные коммутативные *-подалгебры алгебр локально измеримых операторов .	74
Пасенчук А. Э. Нестандартная частичная мультипликативность в теории двумерных операторов Теплица	75
Султанахмедов М. С. Приближение функций специальными вейвлет-рядами Чебышева второго рода	76
Ташпулатов С. М. Спектр оператора энергии трехэлектронных систем в примесной модели Хаббарда	78
Umarkhadzhiev S. Hardy operators in grand Lebesgue spaces	81
Унучек С. А. Одновременное восстановление операторов разделенной разности неточно заданной последовательности по преобразованию Фурье в среднеквадратичной норме	82
Шах-Эмиров Т. Н. Некоторые вопросы теории приближения в пространствах Лебега с переменным показателем	84
Шубарин М. А. Замечание об ограниченных операторах между интерполяционными пространствами	85
Эльсаев Я. В. Теорема типа Стайнспринга для условно положительных ядер	86

СЕКЦИЯ II
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Асхабов С. Н. Критерий положительности интегро-дифференциального оператора свертки и его приложения	88
Баззаев А. К. Численные методы решения дифференциальных уравнений с производными дробного порядка	90
Балашова Г. С. О разрешимости задачи Дирихле для дифференциальных уравнений бесконечного порядка	92
Барановский Е. С. О разрешимости одного варианта модели FENE-P движения полимерной жидкости	94
Бозоров З. Р., Дурдиев Д. К. Задача определения ядра интегро-дифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью. Метод моментов	96
Бойков И. В. Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений	99
Буркин И. М. Аналитико-численные методы поиска скрытых аттракторов многомерных динамических систем	101
Дурдиев Д. К. Разрешимость задачи восстановления памяти среды в гиперболическом уравнении второго порядка с переменными коэффициентами	103
Дурдиев Д. К., Турдиев Х. Х. Задача определения ядра интегро-дифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью методом Фурье	105
Исраилов С. В., Сагитов А. А. Последовательное интегрирование линейного дифференциального уравнения	108
Ишмеев М. Р., Левенштам В. Б., Нгуен Л. К. Высокочастотные асимптотики периодических по времени решений систем дифференциальных уравнений с кратным вырождением	109
Климентов Д. С. О вычислении кривизны поверхности ограниченной вариации через характеристики винеровского процесса	111
Кожевникова Л. М. Об энтропийных решениях анизотропных эллиптических уравнений с переменными нелинейностями	112
Kravchenko V. V., Torba S. M., Shishkina E. L. The explicit representation of the kernel for one transmutation operator	114
Музаев И. Д., Музаев Н. И. Постановка и решение начально-краевой задачи, моделирующей селективный водозаборный процесс в стратифицированном водоеме	116

Поляков Д. М. Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора четного порядка	118
Попов В. А. Обобщение понятия полноты риманова аналитического многообразия	120
Ремизов И. Д. Исчисление функций Чернова и задача Коши для эволюционных уравнений	121
Тотиева Ж. Д. Об одной обратной задаче для уравнения электровязкоупругости	123
Умаров Х. Г. Задача Коши для уравнения продольных колебаний нелинейно-упругого стержня бесконечной длины	126
Хубежты Ш. С. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с применением рядов Чебышева на классе функций, обращающихся в нуль на левом конце и в бесконечность на правом конце интервала интегрирования	127
Черныш А. С. Асимптотика спектра стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса в сферическом слое с вращающейся внешней сферой	130
Юлдашев Т. К. Смешанное интегро-дифференциальное уравнение четвертого порядка с вырожденным ядром	132

СЕКЦИЯ III

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Алпеева Л. Е. Разработка алгоритма трассировки звуковых лучей с использованием метода обхода пространственных ячеек	135
Артемов М. А., Барановский Е. С. Об одном алгоритме решения задач термопластичности	137
Афанаскина И. В., Дорофеева В. И. К вопросу об исследовании процесса оседания бугра грунтовых вод в однородных слоях	139
Волик М. В. Исследование влияния длины улиц и высоты домов на движение воздуха в трехмерных элементах городской застройки ...	141
Волик М. В. Исследование влияния длины улицы на распространение газообразных загрязняющих веществ	142
Гетман В. А. Квазистационарные спиральные моды в кровеносном сосуде	144
Гетманский М. С., Снопов А. И. О законе расширения облака взрыва	145

Димитриева Н. Ф. Математическое моделирование течения клина в стратифицированной жидкости	146
Дударев В. В., Мнухин Р. М. О колебаниях функционально-градиентных пьезоэлектрических тел с предварительными напряжениями	148
Казарников А. В. Численное и аналитическое исследование бифуркаций в системе Рэлея с диффузией	149
Кириченко О. В. Длинноволновая асимптотика задачи устойчивости двумерных течений вязкой жидкости	151
Клепиков П. Н., Родионов Е. Д. Исследование эйнштейново-подобных псевдоримановых многообразий с использованием методов компьютерной математики	152
Клепикова С. В., Хромова О. П. Применение символьных вычислений при исследовании 4-мерных однородных псевдоримановых многообразий	153
Корниевский А. С., Наседкин А. В., Наседкина А. А. Модели гомогенизации смесевых композитов с пограничными свойствами в межфазных зонах	154
Лекомцев Д. Г. Работа совершенной скважины в анизотропном неоднородном слое грунта с квадратичным законом изменения проводимости	156
Лысенко С. А. Об условиях неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга	158
Минасян Д. Г., Орлова Н. С. Моделирование движения обвалов с использованием метода дискретного элемента	160
Музаев И. Д. Математическое моделирование упругих колебательных процессов в ударном инструменте	162
Нартиков А. А. Использование имитационного моделирования для анализа эффективности систем массового обслуживания	164
Никонорова Ю. В. Применение эконометрических методов при исследовании выручки предприятия	165
Орлова Н. С. Структура виброкипящего слоя в зависимости от его начальной толщины	166
Оськин А. Ф., Оськин Д. А. Применение нечетких когнитивных карт для моделирования социальных процессов	168
Оськин А. Ф., Оськин Д. А. Прогнозирование академической деятельности с помощью анализа образовательных данных	169
Переварюха А. Ю. Моделирование конкурентного отклонения в темпах развития организмов	170

Радионон А. А. О малых колебаниях питающей системы вулкана	172
Ревина С. В. Об устойчивости двумерных течений вязкой жидкости ...	176
Сидорякина В. В., Сухинов А. И. Априорные оценки для разностной схемы, аппроксимирующей линеаризованную задачу транспорта наносов	177
Субботин В. И. Характеризация неархимедовых сильно симметричных многогранников	179
Федяев Ю. С. Математическое моделирование эволюции границы раздела жидкостей в анизотропном слое пористой среды	180

СЕКЦИЯ IV
СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Абатурова В. С., Смирнов Е. И. Адаптация современных достижений в науке к обучению математике	183
Алборова В. Э. Практико-ориентированный подход в обучении информатике студентов	185
Бегиева Т. Б. Метод рационализации: ориентировочная основа действий	186
Богун В. В. Применение синергетического подхода в лабораторном практикуме по математическому анализу	188
Дробышев Ю. А. Воспитание личностных качеств студентов средствами истории математики	190
Дятлов В. Н. Переформулировки при решении задач с параметрами ...	192
Иванов А. В., Иванов Д. В. Идентификация систем класса Гаммерштейна дробного порядка при наличии автокоррелированных помех	194
Ивков В. А., Секованов В. С., Смирнов Е. И. Изучение аттракторов нелинейных отображений в рамках многоэтапных математико-информационных заданий как средство развития креативности студентов	196
Караева Дж. А. Решение задач с экономическим содержанием	198
Крюков Д. В., Рябых Г. Ю., Фролова Н. В. Особенности обучения людей с ограниченными возможностями	199

Лобанова Н. И. Методика преподавания дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования	200
Малова И. Е. Методическая рефлексия обучения математике	202
Мокрушин А. Н. Современное состояние проблемы формирования интереса учащихся к математике	204
Налбандян Ю. С. Математическое образование в Ростове-на-Дону (1917–2017)	206
Охват Л. П. Задача с параметрами как средство формирования метапредметных умений	208
Смирнов Е. И. Технология обучения математике с синергетическим эффектом в «проблемных зонах» использования ИКТ	209
Тестов В. А. Синергия порядковых и алгебраических структур в подготовке учителя математики	211
Список сокращений	214

Пленарные доклады

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА КЛАССИЧЕСКИХ
ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ¹

А. В. Абанин

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Рассматривается задача об описании инвариантных подпространств операторов интегрирования и дифференцирования в весовых пространствах голоморфных функций.

В 2008 г. А. Алеман и Б. Коренблум [1] сформулировали ряд достаточных условий того, что в абстрактном банаховом пространстве X функций, голоморфных в единичном круге, все инвариантные подпространства оператора интегрирования имеют вид $z^n X$, $n \in \mathbb{N}$. Область применимости условий из [1] — пространства функций медленного роста, растущих при приближении аргумента z к единичной окружности не быстрее, чем $(1 - |z|)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Другим методом О. Константин и Х. А. Пелаез [2] получили аналогичный результат для пространств Фока целых функций, задаваемых быстро растущими на бесконечности весами. Приведенные в [2] общие условия на веса удалось проверить для весов одного специального вида, а их проверка для других известных примеров быстро растущих весов представляется трудной, более того невыполнимой, задачей.

В статье [3] А. Атцмон и Б. Брайв доказали, что в гильбертовом пространстве Фока целых функций, задаваемом весом $\exp |z|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, инвариантными подпространствами оператора дифференцирования являются только множества \mathcal{P}_n всех полиномов степени не выше $n = 0, 1, \dots$

В докладе будет представлен новый подход к исследованию обозначенной проблемы, который применим к широкому спектру классических шкал весовых банаховых пространств голоморфных функций в круге и на плоскости — Бергмана, Дирихле, Блоха и Фока, задаваемых весами общего вида. Он основан на привлечении близких весовых пространств и пригоден для весов как медленно, так и быстро растущих. Приведем два характерных результата.

Пусть v — радиальный вес на G , где G — единичный круг \mathbb{D} или комплексная плоскость \mathbb{C} , и $p \in (0, \infty)$. Весовое пространство Бергмана A_v^p или Фока \mathcal{F}_v^p — это пространство всех голоморфных в \mathbb{D} или, соответственно, целых функций f , для которых

$$\|f\|_G^p := \int_G |f(z)|^p v^{-p}(z) dm(z) < \infty,$$

где m — мера Лебега на G . При $1 \leq p < \infty$ пространства A_v^p и \mathcal{F}_v^p являются банаховыми, а в случае $0 < p < 1$ они будут полными линейными метрическими пространствами с расстоянием $d(f, g) := \|f - g\|_G^p$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-01404.

Теорема 1. Пусть v — радиальный вес на \mathbb{D} , для которого

$$\limsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log v(r)}{\log \frac{1}{1-r}} < \infty.$$

Тогда инвариантными подпространствами оператора интегрирования в пространствах Бергмана A_v^p , $p > 0$, являются подпространства $z^n A_v^p$, $n = 1, 2, \dots$, и только они.

Отметим, что в [1] было доказано, что аналогичная структура инвариантных подпространств оператора интегрирования имеется в пространствах Бергмана специального вида и при дополнительных ограничениях на p . А именно для пространств $A_{v_{\alpha,p}}^p$, задаваемых весами $v_{\alpha,p} = (1 - |z|)^{-\alpha/p}$ при $p \geq 1$, $\alpha > -1$, $(\alpha + 2)/p < 1$. Ясно, что из теоремы 1 следует, в частности, что этот результат имеет место для пространств $A_{v_{\alpha,p}}^p$ при всех $\alpha, p > 0$.

Теорема 2. Пусть v — радиальный вес на \mathbb{C} , для которого

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log v(r)}{\log r} < 1, \quad (1)$$

и при некотором $C > 0$

$$v(r+1) \leq Cv(r) \quad \text{для всех } r \geq 0. \quad (2)$$

Тогда инвариантными подпространствами оператора дифференцирования в пространствах Фока \mathcal{F}_v^p , $p \geq 1$, являются семейства полиномов степени не выше $n = 0, 1, \dots$ и только они.

Отметим, что условие (2) выполняется для любого веса v , удовлетворяющего хотя бы одному из следующих предположений: а) функция $\log v$ вогнута (см., например, [3, предложение 1]) или б) v log-выпукла, т. е. функция $\log v(e^x)$ выпукла на \mathbb{R} , и $\log v(r) = O(r)$ при $r \rightarrow \infty$ (см. [4, теорема 2.10]). При этом ясно, что последняя асимптотическая оценка имеет место для любого веса, удовлетворяющего (1).

Применяя теорему 2 к $v(z) = e^{|z|^\alpha}$ с $0 < \alpha < 1$, получаем распространение упомянутого выше результата из [3] на классические пространства Фока \mathcal{F}_v^p при всех $p \geq 1$ (напомним, что в [3] $p = 2$).

Основные результаты получены автором совместно с Фам Чонг Тиеном.

Литература

1. Aleman A., Korenblum B. Volterra invariant subspaces of H^p // Bull. Sci. Math.—2008.—Vol. 132, № 6.—P. 510–528.
2. Constantín O., Peláez J. A. Integral operators, embedding theorems and a Littlewood–Paley formula on weighted Fock spaces // J. Geom. Anal.—2017.—Vol. 26, № 2.—P. 1109–1154.
3. Atzmon A., Brive B. Surjectivity and invariant subspaces of differential operators on weighted Bergman spaces of entire functions // Contemp. Math.—2006.—Vol. 404.—P. 27–39.
4. Abanin A. V., Pham Trong Tien. Differentiation and integration operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // Math. Nachr.—2017.—DOI: 10.1002/mana.201500405.

РЯДЫ ФУРЬЕ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ДЕСЯТОГО ПОРЯДКА
С ПЯТИКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Х. А. Абдусаламов (Россия, Махачкала; ДГУ)

А. И. Вагабов (Россия, Махачкала; ДГУ)

Рассматривается дифференциальный пучок с комплексным параметром λ :

$$l(y) \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^5 y(x), \quad 0 < x < 1, \quad y(1) = 0,$$
$$\frac{d^{s-2}y(0)}{dx^{s-2}} = 0, \quad s = 2, 3, \dots, 10.$$

Опираясь на фундаментальную систему решений уравнения $l(y) = 0$,

$$y_j(x) = x^{j-1}e^{\lambda x}, \quad y_{j+5}(x) = x^{j-1}e^{-\lambda x}, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5,$$

строится мероморфная по λ функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$.

Установлена

Теорема. Пусть $f_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, 9$, $0 < x < 1$, — десятикратно непрерывно дифференцируемые функции равные нулю вместе с производными при $x = 0, 1$. Справедлива формула десятикратного разложения по корневым функциям пучка:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_\nu} \lambda^s d\lambda \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \sum_{k=0}^9 \frac{l(f_k(\xi))}{\lambda^{k+1}} d\xi = f_s(x), \quad s = 0, 1, \dots, 9,$$

где G_ν — последовательность расширяющихся замкнутых контуров, проходящих вне δ — окрестности полюсов функции Грина.

Литература

1. Вагабов А. И. n -кратная формула разложения в ряды Фурье по корневым элементам дифференциального пучка с n -кратной характеристикой // Диф. уравнения.—2016.— Т. 52, № 5.—С. 555–560.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПО НЕПОЛНОЙ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ

Бабич (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),

Левенштам (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

В докладе рассматривается начально-краевая задача для одномерного волнового уравнения с быстро осциллирующей по времени правой частью (свободным членом), которая неизвестна. Исследованы некоторые задачи о ее восстановлении при тех или иных сведениях (дополнительных условиях) о решении (точнее, об асимптотике решения). Такого рода задачи естественно отнести к известному классу обратных коэффициентных задач.

Обратные задачи составляют активно развивающееся направление современной математики (см., например, монографии [1–4] и библиографии в них). Однако задачи с быстро осциллирующими слагаемыми (высокочастотные задачи) в этой теории почти не представлены. Объяснить это можно тем, что, обычно используемые в классической теории обратных задач, дополнительные условия (задание решения при фиксированном значении пространственной или временной переменной; различные интегральные условия на решение и т. д.) для задач с быстро осциллирующими данными ставить неестественно. Действительно, подобную информацию обычно трудно или даже невозможно получить на практике, поскольку решение может быстро меняться во времени. Для высокочастотных задач условия классического типа естественно ставить на несколько первых коэффициентов асимптотики решения, так как последние обычно являются решениями задач, не содержащих быстро осциллирующих слагаемых. Сколько этих коэффициентов должно быть задействовано для решения обратной задачи следует определять при решении прямой задачи, которая заключается в построении асимптотического разложения решения.

В данной работе задача о восстановлении свободного члена вида $f(x, t)r(t, \omega t)$, $\omega \gg 1$, волнового уравнения поставлена и решена в следующих четырех случаях: 1) не известна функция $r(t, \tau)$; 2) не известна функция $f(x, t) \equiv f(x)$; 3) в паре f, r известно лишь среднее r_0 функции $r(t, \tau)$ по τ ; 4) не известны обе функции f и r .

В заключение отметим, что ранее аналогичные задачи были нами решены для уравнения теплопроводности; решение задачи типа 1) опубликовано в [5].

Литература

1. Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г., Яхно В. Г. Одномерные обратные задачи математической физики.—Новосибирск: Наука, 1982.—88 с.
2. Романов В. Г. Одномерные обратные задачи математической физики.—Обратные задачи математической физики.—М.: МГУ, 1984.
3. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач.—М.: Наука, 1994.
4. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи.—Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2008.
5. Babich P. ,V., Levenshtam V. B. Direct and inverse asymptotic problems high-frequency terms // Asymptotic Anal.—2016.—№ 97.—P. 329–336.

ПРОБЛЕМА ФОРМАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА

А. Б. Батхин

(Россия, Москва; ИПМ им. М. В. Келдыша, МФТИ)

Пусть функция Гамильтона H в точке положения равновесия (ПР) представлена в виде ряда

$$H(\mathbf{Z}) = \sum_{i=2}^{\infty} H_i(\mathbf{Z}), \quad (1)$$

где $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, \mathbf{X} и \mathbf{Y} — канонически сопряженные векторы координат и импульсов, а $H_i(\mathbf{Z})$ — однородная функция степени i от них.

Предлагается схема исследования формальной устойчивости положения равновесия системы Гамильтона с числом степеней свободы более двух, правые части которой гладко зависят от вектора параметров \mathbf{P} , при условии, что квадратичная форма $H_2(\mathbf{Z})$ в разложении (1) невырождена и не является знакоопределенной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. ПР $\mathbf{Z} = 0$ системы с функцией Гамильтона $H(\mathbf{Z})$ является *формально устойчивым*, если существует возможно расходящийся степенной ряд $G(\mathbf{Z})$, который является формальным положительно определенным первым интегралом: $\{G, H\} = 0$, где $\{\cdot, \cdot\}$ — скобка Пуассона.

Предлагаемая схема исследования существенно использует нормальную форму системы Гамильтона вблизи положения равновесия и параметрическое представление т. н. *резонансного множества* $\mathcal{R}(f_n)$ вещественного многочлена $f_n(x)$, полученное автором в [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Резонансным множеством $\mathcal{R}_q(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ назовем множество всех точек \mathbf{P} пространства его коэффициентов Π , в которых $f_n(x)$ имеет по крайней мере пару q -соизмеримых корней:

$$\mathcal{R}_q(f_n) = \{\mathbf{P} \in \Pi : \exists j, k = 1, \dots, n, t_j : t_k = q, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \quad (2)$$

где $t_i, i = 1, \dots, n$, — корни многочлена $f_n(x)$ степени n .

Резонансное множество $\mathcal{R}_q(f_n)$ является обобщением дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ и может быть исчерпывающе описано с помощью q -аналога субдискриминантов многочлена $f_n(x)$. Параметрическое представление всех компонент множества $\mathcal{R}_q(f_n)$ получено в [1] аналогично тому, как это было сделано в [2] для дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$.

Схема исследования формальной устойчивости состоит из последовательности шагов.

НА ПЕРВОМ ШАГЕ вычисляется множество устойчивости $\mathcal{S} \subset \Pi$ линейной системы Гамильтона

$$\dot{\mathbf{Z}} = JA(\mathbf{P})\mathbf{Z}, \quad \text{где } A(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \text{Hess } H_2(\mathbf{Z}), \quad J \text{ — симплектическая единица.} \quad (3)$$

Граница $\partial\mathcal{S}$ множества устойчивости \mathcal{S} состоит из частей двух резонансных множеств (2) характеристического многочлена $f(\lambda)$ матрицы $JA(\mathbf{P})$ системы (3): $\mathcal{R}_0(f)$ (случай кратного нулевого корня) и $\mathcal{R}_1(f) \equiv \mathcal{D}(f)$ (случай дискриминантного множества). Алгоритм вычисления множества устойчивости \mathcal{S} описан в [3]. Когда множество устойчивости \mathcal{S} вычислено, в нем выделяется открытая область \mathcal{W} , на которой форма $H_2(\mathbf{Z})$ не является знакоопределенной и, следовательно, неприменима теорема Лагранжа — Дирихле об устойчивости по Ляпунову.

На следующем шаге исследование формальной устойчивости положения равновесия $\mathbf{Z} = 0$ определяется с использованием теоремы Брюно [4, 5]. Для этого вычисляются резонансные множества $\mathcal{R}_2(f)$ и $\mathcal{R}_3(f)$, разбивающие область \mathcal{W} на подобласти \mathcal{W}_j , в каждой из которых могут быть лишь резонансы порядка 4 и выше. Таким образом, в каждой из подобластей \mathcal{W}_j гамильтониан (1) может быть приведен к нормальной форме 4-го порядка вида $\tilde{H}(\boldsymbol{\rho}) = \tilde{H}_2(\boldsymbol{\rho}) + \tilde{H}_4(\boldsymbol{\rho})$, где $\tilde{H}_2(\boldsymbol{\rho}) = (\mathbf{\Lambda}, \boldsymbol{\rho})$, $\tilde{H}_4(\boldsymbol{\rho}) = (B\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho})$, $\boldsymbol{\rho}$ — переменные действия, $\mathbf{\Lambda}$ — вектор собственных частот системы (3), B — квадратная матрица.

Утверждение 1. *Если полуалгебраическая система $\tilde{H}_2(\boldsymbol{\rho}) = \tilde{H}_4(\boldsymbol{\rho}) = 0$, $\boldsymbol{\rho} \geq 0$, несовместна, то, согласно теореме Брюно, ПР $\mathbf{Z} = 0$ формально устойчиво.*

Пусть в какой-либо из подобластей \mathcal{W}_j условия утверждения 1 не выполнены. Тогда, выделяя с помощью резонансных множеств $\mathcal{R}_4(f)$ и $\mathcal{R}_5(f)$ подобласти свободные от резонансов до 6-го порядка включительно, нужно привести гамильтониан (1) к нормальной форме 6-го порядка $\tilde{H}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^3 \tilde{H}_{2j}(\boldsymbol{\rho})$ и рассмотреть полуалгебраическую систему $\tilde{H}_2(\boldsymbol{\rho}) = \tilde{H}_4(\boldsymbol{\rho}) = \tilde{H}_6(\boldsymbol{\rho}) = 0$, $\boldsymbol{\rho} \geq 0$. Если эта система несовместна, то, используя схему доказательства теоремы Брюно, можно доказать формальную устойчивость ПР.

ЗАМЕЧАНИЕ. На участках резонансных множеств $\mathcal{R}_k(f)$, $k = 2, 3, \dots$, где имеется однократный резонанс, применимы теоремы из [5, гл. 4, §§ 2, 3]. Для случая кратного резонанса, а также для резонанса порядка 2 исследование формальной устойчивости может быть проведено с использованием другого подхода.

Литература

1. Батхин А. Б. Структура резонансного множества вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша.—2016.—№ 29.—С. 1–23.—DOI: 10.20948/rgrpr-2016-29.
2. Батхин А. Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование.—2016.—Т. 42, № 2.—С. 8–21.—DOI:10.1134/S0361768816020031.
3. Батхин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикл. мат. и мех.—2012.—Т. 76, № 1.—С. 80–133.
4. Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона // Мат. заметки.—1967.—Т. 1, № 3.—С. 325–330.—DOI:10.1007/BF01098887.
5. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике.—М.: Наука, 1978.

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА
ОБЩЕГО ВИДА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ

З. В. Бештокова

(Россия, Нальчик; ИПМА)

В данной работе рассматривается краевая задача для обобщенного вырождающегося параболического уравнения общего вида с дробной производной Римана — Лиувилля. Для решения рассматриваемой задачи получена априорная оценка в дифференциальной форме. Из априорной оценки следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

В замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим следующую краевую задачу для обобщенного вырождающегося уравнения с дробной производной Римана — Лиувилля порядка α :

$$D_{0t}^\alpha u = \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x, t)u + f(x, t), \quad (1)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$D_{0t}^{\alpha-1}(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

где

$$D_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

— дробная производная в смысле Римана — Лиувилля порядка α , $0 < \alpha < 1$,

$$0 < c_0 \leq k(x, t), q(x, t), r_x(x, t) \leq c_1,$$

$$|r(x, t)| \leq c_2, \quad r(0, t) \geq 0, \quad r(l, t), k_t, q_t \leq 0,$$

$$U = D_{0t}^{\alpha-1} u(x, \tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad 1 \leq m \leq 2. \quad (5)$$

Условие (2) является условием ограниченности решения $|u(0, t)| < \infty$, которое эквивалентно условию $k(0, t)u_x(0, t) = 0$ (см. [4, с. 173]).

Получим априорную оценку для решения дифференциальной задачи (1)–(4), для этого умножим уравнение (1) скалярно на $x^m \bar{u} = x^m u + x^m U$, где

$$U = D_{0t}^{\alpha-1} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^\alpha},$$

$$\left(D_{0t}^{\alpha-1}u, x^m\bar{u}\right) = \left((x^m k u_x)_x, \bar{u}\right) + \left(r u_x, x^m\bar{u}\right) - \left(q u, x^m\bar{u}\right) + \left(f, x^m\bar{u}\right). \quad (6)$$

После некоторых преобразований на основании леммы Гронуолла (см. [6, с. 152]) из (6) получаем искомую априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}U\|_0^2 + \int_0^t \left(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\right) d\tau \leq M \left(\int_0^t \|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 d\tau + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_0^2\right), \quad (7)$$

где M зависит только от входных данных задачи (1)–(4).

Из (7) следуют единственность и устойчивость решения задачи (1)–(4) по начальным данным и по правой части.

Теорема. Пусть выполнены условия (5), тогда для решения дифференциальной задачи (1)–(4) справедлива априорная оценка (7).

Литература

1. Таукенова Ф. И., Шхануков-Лафишев М. Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2006.—Т. 46, № 10.—С. 1871–1881.
2. Кумыкова С. К. Об одной краевой задаче для уравнения $signy^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ // Диф. уравнения.—1976.—Т. 12, № 1.—С. 79–88.
3. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—616 с.
5. Alikhanov A. A. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings // Appl. Math. Comput.—2012.—Vol. 219 (8).—P. 3938–3946.
6. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—407 с.

CASCADES OF TRIADIC RESONANCE INSTABILITIES
IN INTERNAL WAVES ATTRACTORS

C. Brouzet (France, Lyon; ENS de Lyon),

T. Dauxois (France, Lyon; ENS de Lyon),

E. V. Ermanyuk (Russia, Novosibirsk, LIH SB RAS;
France, Lyon, ENS de Lyon),

S. Joubaud (France, Lyon; ENS de Lyon),

I. Sibgatullin (Russia, Moscow; MSU)

In contrast to the atmosphere of the Earth, the driving force of the Ocean is not a heat engine. Vertical mechanisms of energy transfer due to thermal processes and wind play significant role mostly in the vicinity of the surface of the Ocean. Meanwhile the global dynamics of the Ocean is also greatly affected by deep water processes and mixing. It means that now one of the most important questions in the dynamics of the oceans is related to the cascade of mechanical energy in the abyss and its contribution to mixing. Here, we propose internal-wave attractors in the large-amplitude regime as a unique self-consistent experimental and numerical setup that models a cascade of triadic interactions transferring energy from large-scale monochromatic input to multi-scale internal-wave motion. We also provide signatures of a discrete wave turbulence framework for internal waves. Beyond this regime, we have a clear transition to a regime of small-scale high-vorticity events which induce mixing. Also we have studied mixing due to boundary interaction and wave attractors formed from 3D sources of monochromatic waves in trapezoidal geometry.

References

1. *Maas L. R. M., Benielli D., Sommeria J., Lam F. P. A.* Observations of an internal wave attractor in a confined stably stratified fluid // *Nature*.—1997.—Vol. 388.—P. 557–561.
2. *Brouzet C., Joubaud S., Ermanyuk E., Sibgatullin I., Dauxois T.* Energy cascade in internal-wave attractors // *Europhys. Lett.*—2016.—Vol. 113, no. 4.—P. 44001.—URL: <http://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/113/44001>.
3. *Brouzet C., Sibgatullin I., Scolan H., Ermanyuk E., Dauxois T.* Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3d numerical simulations // *J. Fluid Mech.*—2016.—Vol. 793.—P. 109–131.—URL: <http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2016.119>.

НЕОДНОРОДНЫЕ МАТЕРИАЛЫ С ПОКРЫТИЯМИ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ¹

А. О. Ватульян (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
С. А. Нестеров (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

В современных конструкциях в качестве защитных или усиливающих элементов все чаще используются функционально-градиентные покрытия — неоднородные покрытия с непрерывно изменяющимися по глубине термоупругими свойствами. Многие исследователи при решении задач термомеханики для неоднородных тел ограничиваются степенными и экспоненциальными законами изменения термомеханических характеристик. Однако актуальной задачей в настоящее время является проблема моделирования деформирования неоднородного покрытия по глубине и определение термомеханических характеристик покрытия при произвольных законах изменения термомеханических свойств на основе аппарата коэффициентных обратных задач (КОЗ).

В работе рассматривается динамическая обратная задача термоупругости для слоя с функционально-градиентным покрытием. Слой с покрытием моделируется в виде термоупругого слоя с неоднородными по глубине термомеханическими свойствами — коэффициентом теплопроводности, удельной теплоемкостью, модулем упругости, плотностью, коэффициентом температурного напряжения. Функции, характеризующие неоднородность, имеют точки разрыва первого рода на границе соприкосновения покрытия с подложкой. Обратная задача состоит в определении термомеханических характеристик слоя с учетом наличия точки разрыва первого рода на границе покрытия и подложки.

Схема решения основана на предварительном сведении с помощью преобразования Фурье к двум более простым и одномерным несвязанным задачам относительно усредненных характеристик, каждая из которых сводится к известной КОЗ, что позволяет использовать ранее построенные итерационные схемы и регуляризующие алгоритмы. Задача для слоя в трансформантах решается на основе метода сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В качестве метода обращения преобразования Лапласа используется теория вычетов.

Термомеханические характеристики слоя с покрытием восстанавливались в два этапа. На первом этапе определялось начальное приближение для слоя в классе положительных ограниченных линейных функций методом минимизации функционала невязки. На втором этапе определялись поправки реконструируемых функций путем решения соответствующего интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. После нахождения поправок строилось новое приближение и

¹Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН, проект № 114072870112.

осуществлялся итерационный процесс уточнения восстанавливаемых характеристик. Критерий выхода из итерационного процесса — достижение некоторого порогового значения функционала невязки.

В ходе вычислительных экспериментов проведен анализ влияния жесткости покрытия, монотонности характеристик в приповерхностном слое, относительной толщины покрытия, параметра термомеханической связанности на результаты реконструкции неоднородных термомеханических характеристик. Даны практические рекомендации по выбору наиболее информативных временных интервалов для измерения входной информации. Выяснено, что на результаты реконструкции влияет толщина слоев: чем толще слой, тем результат реконструкции лучше. Однако результаты реконструкции не зависят от соотношения модулей покрытия и подложки.

ИНДИВИДУАЛЬНО-ГРУППОВЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ МАТЕМАТИКЕ

И. В. Дробышева

(Россия, Калуга; Финансовый университет)

Ориентация высшего образования на подготовку компетентного специалиста требует изменения не только вектора требований к выпускникам вузов, но и подходов к процессу обучения студентов.

Одно из таких изменений связано с возрастающей ролью самостоятельной работы студентов для открытия новых способов деятельности и их применения в целях решения профессионально-ориентированных задач, для поиска информации, ее адаптации и использования для создания собственных подходов к разрешению практико-ориентированных ситуаций. Очевидно, что успешность выполнения данных видов самостоятельной работы определяется в первую очередь готовностью студентов к такой деятельности.

Анализ готовности студентов к осуществлению самостоятельной работы показал, что имеет место тенденция снижения ее уровня, наиболее значимо проявляющаяся в операциональном компоненте. Отношение числа студентов, выполняющих репродуктивные самостоятельные работы, к числу студентов, успешно выполняющих соответственно эвристические и исследовательские самостоятельные работы, определяется как 8:3:1. Следствием этого факта является низкий уровень мотивации первокурсников к самостоятельной деятельности.

Анализ причин полученных результатов, проведенный, в том числе с использованием психологических методов диагностики, показал, что более чем у 20% студентов низкий уровень сформированности мыслительных операций и теоретического обобщения. Аналогичные результаты по таким значимым для математической деятельности показателям, как гибкость и критичность мышления.

Полученные данные очевидным образом свидетельствуют о необходимости дифференцированного подхода к осуществлению математической подготовки студентов. В условиях стандартизированных требований к овладению предметным содержанием и компетенциями, формируемыми при его изучении, речь должна идти о дифференциации, направленной на повышение уровня сформированности мыслительных операций, качеств мышления; овладение математическим аппаратом и соответствующими способами действий на уровне, достаточном для решения профессионально-направленных задач; овладение общекультурными и профессиональными компетенциями на уровне, обеспечивающем продуктивную деятельность.

В целях реализации поставленных задач разработана технология дифференцированного компетентностно-ориентированного обучения студентов математике, одной из отличительных особенностей которой является идея обучения студентов математике в рамках индивидуально-групповых образовательных траекторий (ИГОТ), под которыми понимаем «индивидуальные програм-

мы обучения как отдельных обучающихся, так и их групп» [1]. Процесс создания индивидуально-групповых образовательных траекторий включает последовательность взаимосвязанных этапов. Определяющим содержание других этапов и особенности обучения по созданной траектории является этап теоретического анализа. Его результатом являются матрица планируемых результатов обучения и внешняя структура ИГОТ, включающая диагностические, корректировочные, аудиторские обучающие, внеаудиторские обучающие блоки. В работах [2, 3] раскрыты характеристики других этапов проектирования индивидуально-групповых образовательных траекторий обучения студентов математике и особенности обучения по ним.

Дополнение его возможностями современных ИКТ позволит повысить уровень индивидуализации.

Литература

1. Дробышева И. В., Дробышев Ю. А. О коррекционном этапе дифференцированного обучения студентов математике // *Соврем. математика и концепции инновац. мат. образования.*—2016.—Т. 3, № 1.—С. 230–236.
2. Дробышева И. В., Дробышев Ю. А. Дифференцированное компетентностно-ориентированное обучение студентов математике: условия, этапы проектирования и осуществления // *Соврем. проблемы науки и образования.*—2015.—№ 2–2.
3. Дробышева И. В. Об этапах проектирования индивидуально-групповых образовательных траекторий обучения студентов математике // *Соврем. проблемы науки и образования.*—2014.—№ 6.—С. 691.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОПЕРАТОРОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ НА КОНУСАХ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А. К. Дронов

(Россия, Ростов-на-Дону; РГЭУ (РИНХ))

При исследовании вопросов теории базисов в ядерных пространствах Фреше важную роль играют интерполяционные свойства операторов, действующих в пространствах числовых последовательностей. Отдельный интерес представляют интерполяционные свойства операторов, ограниченные не на всем пространстве, а на некотором вложенном в него конусе, либо семействе конусов. В последнем случае целесообразно вводить понятие равномерного интерполяционного свойства.

Теорема. Пусть $E_i = c_0(a_i)$, $F = c_0(b_i)$ ($i = 0, 1$), $E = c_0(a)$, $F = c_0(b)$, причем $E_1 \subset E \subset E_0$, $F_1 \subset F \subset F_0$, и банахова тройка (E_0, E_1, E) обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F) . Пусть \mathcal{A} — множество конусов в ω^+ такое, что для каждого конуса $Q \in \mathcal{A}$ выполняются условия:

- 1) Q — нижняя полурешетка в ω ;
- 2) $Q \cap E_1^+$ — тотальный конус в ω .

Тогда семейство троек конусов

$$\mathcal{M} = \{(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F) .

Литература

1. Cerda J., Coll H. Function cones and interpolation // Math. Nachr.—2005.—Vol. 278.—P. 227–239.
2. Каплицкий В. М., Дронов А. К. К теории интерполяции операторов, ограниченных на конусах в весовых пространствах числовых последовательностей // Зап. научн. сем. ПОМИ.—2014.—Т. 424, № 1—С. 154–178.
3. Дронов А. К. О существовании базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кете из класса (d_2) // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 1.—С. 9–20.

О СВЕРТКЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

О. А. Иванова

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Целая в \mathbb{C} функция g_0 такая, что $g_0(0) = 1$, задает оператор Поммье

$$D_{0,g_0}(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t) - g_0(t)f(0)}{t}, & t \neq 0, \\ f'(0) - g_0'(0)f(0), & t = 0, \end{cases}$$

действующий в пространстве $H(\mathbb{C})$ целых функций. С оператором D_{0,g_0} можно связать оператор сдвига

$$T_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{tf(t)g_0(z) - zf(z)g_0(t)}{t - z}, & t \neq z, \\ zg_0(z)f'(z) - zf(z)g_0'(z) + f(z)g_0(z), & t = z, \end{cases}$$

$f \in H(\mathbb{C})$, $z \in \mathbb{C}$. Сдвиги T_z порождают произведение аналитических функционалов. Именно, пусть E — некоторый счетный индуктивный предел весовых пространств Фреше целых (в \mathbb{C}) функций. Веса, задающие E , удовлетворяют стандартным техническим условиям. Определим произведение (свертку) линейных непрерывных на E (аналитических) функционалов φ и ψ следующим образом:

$$(\varphi \otimes \psi)(f)(z) := \varphi(\psi(T_z(f))), \quad f \in E, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Согласно [1] свертка $\varphi \otimes \psi$ корректно определена; с умножением \otimes пространство E' является ассоциативной и коммутативной алгеброй. В докладе идет речь о свойствах этой алгебры.

Пусть $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ — коммутант оператора $D_{0,g_0} : E \rightarrow E$ в кольце всех линейных непрерывных операторов в E . По [1] алгебра (E', \otimes) изоморфна алгебре $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ с операторным умножением посредством отображения $\kappa(\varphi)(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $\varphi \in E'$, $f \in E$, $z \in \mathbb{C}$. Доказано, что κ является и топологическим изоморфизмом пространств E' и $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$, если E' снабдить естественной слабой топологией, а $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ — топологией поточечной сходимости (когда в E введена слабая топология). Указанная «топологичность» изоморфизма применяется при решении задачи о представлении операторов из $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ в виде D_{0,g_0} -операторов бесконечного порядка (в общем случае $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ совпадает с замыканием множества многочленов от D_{0,g_0}). Кроме того, описаны мультипликативные функционалы на алгебре (E', \otimes) , задаваемые элементами из E . Таких функционалов «на 1 больше», чем нулей у g_0 ; если функция g_0 не имеет нулей, то такой функционал единственен.

Существенным побудительным мотивом к данному исследованию послужила статья В. А. Ткаченко [3]. В [3] установлены подобные свойства коммутанта оператора обобщенного интегрирования I_P в сильном сопряженном к весовому (LB) -пространству целых функций, рост которых определяется некоторой ρ -тригонометрически выпуклой функцией. При этом оператор I_P является сопряженным к оператору Помме D_{0,e^P} , где P — некоторый многочлен.

Приведенные результаты получены совместно с С. Н. Мелиховым и опубликованы в [2].

Литература

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Помме в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2016.—Т. 28, № 2.—С. 114–137.
2. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об алгебре аналитических функционалов, связанной с оператором Помме // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 4.—С. 34–40.
3. *Ткаченко В. А.* Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов // Мат. заметки.—1979.—Т. 29, № 2.—С. 271–282.

NONLINEAR WAVES ON THE COUETTE–TAYLOR FLOW WITH THROUGHFLOW

К. И. Илин (UK, York; The University of York),

А. В. Morgulis (Russia, Rostov-on-Don, SFEDU; Vladikavkaz, SMI VSC RAS)

Usually the inviscid incompressible fluid is considered as a conservative system possessing such constants of motion as the total energy and the flow circulation around closed material contours. However, this is not the case provided that the flow is open, i. e., the fluid is allowed to enter the prescribed domain and to leave it through some parts of the boundary, see Fig. 1. Then the fluid flow moves the energy and vorticity in and out of the flow domain. These processes can be treated as the dissipating and pumping. The competition of such processes typically enables the concentrating of the invariant measures on the low-dimensional sets which can consist of isolated points (the equilibria) or represents isolated invariant curves supporting time-periodic motions (the limit cycles), or invariant tori supporting quasi-periodic motions or much more complicated sets bearing chaotic trajectories. No phenomena like these are possible in the Hamiltonian dynamics.

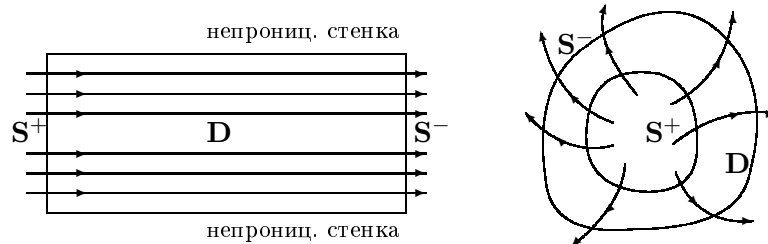


Fig. 1. Open flows.

In the context of fluid dynamics, the attracting equilibrium corresponds to certain steady (time-independent) flow regime which persists for every small enough perturbation: the perturbed flow forgets its initial state with time and goes back to the steady state. Usually the steady regime depends on some physical parameters. The gradual changes in them can cause a sharp transition: once the parameter came through certain critical value the initial perturbations stop decaying and organize themselves into another flow regime while the primary regime turns out to be unstable. The secondary flow regime may be steady, or self-oscillatory or much more complicated. When the flow parameters are close to their critical values the secondary flow may be close to the original equilibria or may remain very different from it. The former and the latter scenarios are widely known as soft and stiff instabilities (or excitations), correspondingly.

In the fluid dynamics, the secondary self-oscillations often represent a kind of nonlinear waves being superimposed on the primary flow. The excitation of them can be examined with the use of local bifurcation theory [1, 2] (Poincaré–Andronov–Hopf bifurcation) with necessary regards to the infinite dimension of the problem.

Such analysis can be traced back to G. Taylor while rigorous theory had been proposed by V. Yudovich [3, 4], and today the onset of self-oscillatory flows of *viscous* incompressible fluid is studied rather well.

Our talk is focused upon the Poincare–Andronov–Hopf bifurcation in the dynamics of *the inviscid open flows*. Although it is clear that the non-conservatism discussed above is capable of giving rise such bifurcation this area remains almost uncharted. There is a numerical example of self-oscillatory flow through a channel (the left frame in Fig. 1) but the analytical study of it meets serious issues since neither the primary flow nor its linear modes can be described explicitly. We address another flow geometry (the right frame in Fig. 1) which admits simple exact expressions for the primary flow. We explore the excitation of secondary flows which represent nonlinear waves traveling in the azimuthal direction. Our study widely employs the linear analysis of prior works [5–7].

References

1. Arnold V. I. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations.—Springer–Verlag, 1988.
2. Marsden J. E., McCracken M. The Hopf Bifurcation and its Applications.—Springer–Verlag, 1976.
3. Iudovich V. I. Investigation of auto-oscillations of a continuous medium, occurring at loss of stability of a stationary mode // J. Appl. Math. Mech.—1972.—Vol. 36, № 3.—P. 424–432. Transl. from Prikl. Mat. Mech.—1972.—Vol. 36, № 3.—P. 450–459.
4. Iudovich V. I. The onset of auto-oscillations in a fluid // J. Appl. Math. Mech.—1971.—Vol. 35, № 4.—P. 587–603. Transl. from Prikl. Mat. Mech.—1971.—Vol. 35, № 4.—P. 638–655.
5. Ilin K., Morgulis A. Inviscid instability of an incompressible flow between rotating porous cylinders to three-dimensional perturbations // Eur. J. Mech. Ser. B/Fluids.—2017.—Vol. 61.—P. 46–60.
6. Ilin K., Morgulis A. Instability of an inviscid flow between porous cylinders with radial flow // J. Fluid Mech.—2013.—Vol. 730.—P. 364–378.
7. Ilin K., Morgulis A. Instability of a two-dimensional viscous flow in an annulus with permeable walls to two-dimensional perturbations // Phys. Fluids.—2015.—Vol. 730.—P. 044107.

ORTHOGONALITY IN C*-ALGEBRAS

A. K. Karn

(India, Bhubaneswar; NISER)

Let A be a C*-algebra. A pair $a, b \in A^+$ is said to be *orthogonal algebraically* (we write $a \perp^a b$), if $ab = 0$. It follows from the functional calculus that for each self adjoint element $a \in A_{sa}$, there exists a unique pair $a^+, a^- \in A^+$ with $a^+ \perp^a a^-$ such that $a = a^+ - a^-$. In this presentation, we obtain a geometric equivalent of algebraic orthogonality. This form is free from multiplication and therefore, is suitable to be introduced in ordered normed spaces. Extending this idea, we introduce a pair of notions in ordered spaces which generalize the notions “join” and the “meet”. Following which we propose a model of non-commutative vector lattices. The presentation will primarily be based on the following papers and books.

References

1. Kadison R. V. and Ringrose J. R. Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, I.—N. Y.: Academic Press, 1983.
2. Karn A. K. A p -theory of ordered normed spaces // Positivity.—2010.—Vol. 14.—P. 441–458.
3. Karn A. K. Orthogonality in ℓ_p -spaces and its bearing on ordered normed spaces // Positivity.—2014.—Vol. 18.—P. 223–234.
4. Karn A. K. Orthogonality in C*-algebras // Positivity.—2016.—Vol. 20 (3)—P. 607–620.
5. Pedersen G. K. C*-Algebras and their Automorphism Groups.—London: Academic Press, 1979.
6. Takesaki M. Theory of Operator Algebras, I.—Springer, 1979.

ИЗОМОРФИЗМ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С. Б. Климентов

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Обозначим через $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z -плоскости E_z , $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга D ; $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

В работе рассматриваются представления второго рода для решений общей эллиптической системы первого порядка в единичном круге. Установлено, что используемые при этом операторы есть изоморфизмы банаховых пространств $C_\alpha^k(\overline{D})$ и $W_p^k(\overline{D})$, $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, $p > 2$.

Обозначим

$$\Omega(w) \equiv w(z) + T(q_1(z)\partial_z w + q_2(z)\partial_z \overline{w} + A(z)w + B(z)\overline{w}),$$

$$\Lambda(\varphi) \equiv \varphi(z) + q_1(z)S\varphi + q_2(z)\overline{S\varphi} + A(z)T\varphi + B(z)\overline{T\varphi},$$

где

$$Tf(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

$$Sf(z) = \partial_z Tf(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta.$$

Основные результаты работы составляют следующие утверждения.

Теорема 1. Если $q_1(z), q_2(z) \in C(\overline{D})$, $A(z), B(z) \in L_p(\overline{D})$, $p > 2$, то Ω — (вещественно) линейный изоморфизм банахова пространства $W_p^1(\overline{D})$, а Λ — (вещественно) линейный изоморфизм банахова пространства $L_p(\overline{D})$.

Теорема 2. Если $q_1(z), q_2(z), A(z), B(z) \in C_\alpha^k(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, то Ω — (вещественно) линейный изоморфизм банахова пространства $C_\alpha^{k+1}(\overline{D})$, а Λ — (вещественно) линейный изоморфизм банахова пространства $C_\alpha^k(\overline{D})$.

Теорема 3. Если $q_1(z), q_2(z), A(z), B(z) \in W_p^k(\overline{D})$, $k \geq 1$, $p > 2$, то Ω — (вещественно) линейный изоморфизм банахова пространства $W_p^{k+1}(\overline{D})$, а Λ — (вещественно) линейный изоморфизм банахова пространства $W_p^k(\overline{D})$.

Эти результаты развивают и дополняют работы Б. В. Боярского [1] и автора [2–3].

Литература

1. Боярский Б. В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб.—1957.—Т. 43, № 4.—С. 451–503.
2. Климентов С. Б. Об одном способе построения решений краевых задач теории изгибов поверхностей положительной кривизны // Укр. геом. сб.—Харьков: Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1986.—Вып. 29.—С. 56–82.
3. Klimentov S. B. On a method of constructing the solutions of boundary-value problems of the theory of bendings of surfaces of positive curvature // J. Math. Sci.—1990.—Vol. 51, № 2.—P. 2230–2248.

VARIATIONAL PROBLEMS WITH POINTWISE
FUNCTIONAL CONSTRAINTS IN VARIABLE DOMAINS¹

A. A. Kovalevsky

(Russia, Yekaterinburg; IMM UrB RAS, UrFU)

In this talk, we describe conditions for the convergence of minimizers and minimum values of integral and more general functionals on sets of functions defined by unilateral pointwise functional constraints in variable domains. Our conditions on the constraints, in particular, admit the study of variational problems with unilateral varying irregular obstacles and with varying constraints combining the pointwise dependence and the functional dependence of the integral form.

Let Ω be a bounded domain of \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), and let $p > 1$. Let $\{\Omega_s\}$ be a sequence of domains of \mathbb{R}^n contained in Ω .

DEFINITION 1. If $s \in \mathbb{N}$, then q_s is the mapping from $W^{1,p}(\Omega)$ into $W^{1,p}(\Omega_s)$ such that, for every function $v \in W^{1,p}(\Omega)$, we have $q_s v = v|_{\Omega_s}$.

DEFINITION 2. We say that the sequence of spaces $W^{1,p}(\Omega_s)$ is strongly connected with the space $W^{1,p}(\Omega)$ if there exists a sequence of linear continuous operators $l_s : W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ such that the sequence of norms $\|l_s\|$ is bounded and, for every $s \in \mathbb{N}$ and for every $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$, we have $q_s(l_s v) = v$ a. e. in Ω_s .

DEFINITION 3. Let, for every $s \in \mathbb{N}$, $I_s : W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$, and let $I : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. We say that the sequence $\{I_s\}$ Γ -converges to the functional I if the following conditions are satisfied: (a) for every function $v \in W^{1,p}(\Omega)$, there exists a sequence $w_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ such that $\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$ and $I_s(w_s) \rightarrow I(v)$; (b) for every function $v \in W^{1,p}(\Omega)$ and for every sequence $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ such that $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$, we have $\liminf_{s \rightarrow \infty} I_s(v_s) \geq I(v)$.

For every function $v \in W^{1,p}(\Omega)$, we denote by $\mathcal{H}(v)$ the set of all sequences $\{v_s\}$ such that: (a) for every $s \in \mathbb{N}$, we have $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$; (b) $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$; (c) $\sup_{s \in \mathbb{N}} \|v_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty$. It is easy to see that if $v \in W^{1,p}(\Omega)$, then $\{q_s v\} \in \mathcal{H}(v)$.

Let $c_1, c_2 > 0$, and let, for every $s \in \mathbb{N}$, $\mu_s \in L^1(\Omega_s)$ and $\mu_s \geq 0$ in Ω_s . We assume that the sequence of norms $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ is bounded. Let, for every $s \in \mathbb{N}$, $f_s : \Omega_s \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ be a function satisfying the following conditions: for every $\xi \in \mathbb{R}^n$, the function $f_s(\cdot, \xi)$ is measurable on Ω_s ; for almost every $x \in \Omega_s$, the function $f_s(x, \cdot)$ is convex on \mathbb{R}^n ; for almost every $x \in \Omega_s$ and for every $\xi \in \mathbb{R}^n$, we have $c_1|\xi|^p - \mu_s(x) \leq f_s(x, \xi) \leq c_2|\xi|^p + \mu_s(x)$.

¹This work was supported by the Program of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences “Current Problems in Algebra, Analysis, and the Theory of Dynamic Systems with Applications to the Control of Complex Objects”, and by the Russian Academic Excellence Project (agreement № 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

DEFINITION 4. If $s \in \mathbb{N}$, then $F_s : W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ is the functional such that, for every function $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$, we have $F_s(v) = \int_{\Omega_s} f_s(x, \nabla v) dx$.

Next, let $c_3, c_4 > 0$, and let, for every $s \in \mathbb{N}$, $G_s : W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ be a weakly lower semicontinuous functional. We assume that $G_s(v) \geq c_3 \|v\|_{L^p(\Omega_s)}^p - c_4$ for every $s \in \mathbb{N}$ and for every $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$.

For every $s \in \mathbb{N}$, we denote by $\mathcal{F}(\Omega_s)$ the set of all functions $v : \Omega_s \rightarrow \mathbb{R}$. Let, for every $s \in \mathbb{N}$, we have a mapping $K_s : W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega_s)$. We assume that the following conditions are satisfied:

(A₁) there exists a sequence $\psi_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ such that the sequence of norms $\|\psi_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ is bounded and, for every $s \in \mathbb{N}$, we have $\psi_s \geq K_s(\psi_s)$ a. e. in Ω_s ;

(A₂) if $s \in \mathbb{N}$ and $v_j \rightarrow v$ strongly in $W^{1,p}(\Omega_s)$, then $K_s(v_j) \rightarrow K_s(v)$ a. e. in Ω_s ;

(A₃) for every $s \in \mathbb{N}$, $v, w \in W^{1,p}(\Omega_s)$, and $\tau \in [0, 1]$, we have

$$K_s((1 - \tau)v + \tau w) \leq (1 - \tau)K_s(v) + \tau K_s(w) \quad \text{a. e. in } \Omega_s.$$

For every $s \in \mathbb{N}$, we set $V_s = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s) : v \geq K_s(v) \text{ a. e. in } \Omega_s\}$. It follows from conditions (A₁)–(A₃) that, for every $s \in \mathbb{N}$, the set V_s is nonempty, closed, and convex. Furthermore, in view of the above assumptions, for every $s \in \mathbb{N}$, there exists a function in V_s minimizing the functional $F_s + G_s$ on the set V_s .

We denote by $\mathcal{F}(\Omega)$ the set of all functions $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Let $K : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega)$. We set $V = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : v \geq K(v) \text{ a. e. in } \Omega\}$.

Theorem. *Assume that the embedding of $W^{1,p}(\Omega)$ into $L^p(\Omega)$ is compact, the sequence of spaces $W^{1,p}(\Omega_s)$ is strongly connected with the space $W^{1,p}(\Omega)$, and, for every increasing sequence $\{m_j\} \subset \mathbb{N}$, we have $\text{meas}(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_{m_j}) = 0$. In addition, suppose that, for every sequence of measurable sets $H_s \subset \Omega_s$ such that $\text{meas } H_s \rightarrow 0$, we have $\int_{H_s} \mu_s dx \rightarrow 0$. Moreover, assume that the sequence $\{F_s\}$ Γ -converges to a functional $F : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ and there exists a functional $G : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ such that, for every function $v \in W^{1,p}(\Omega)$ and for every sequence $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$, we have $G_s(v_s) \rightarrow G(v)$. Finally, suppose that the following conditions are satisfied:*

(1) *if $v \in W^{1,p}(\Omega)$ and $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$, then there exists a sequence of nonnegative functions $\alpha_s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\alpha_s \rightarrow 0$ a. e. in Ω and, for every $s \in \mathbb{N}$, we have $K_s(v_s) \geq K(v) - \alpha_s$ a. e. in Ω_s ;*

(2) *if $v \in W^{1,p}(\Omega)$ and $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$, then there exist a sequence of functions $\sigma_s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, a sequence $\{t_s\} \subset [0, +\infty)$, a sequence $z_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$, and a number $\bar{s} \in \mathbb{N}$ such that $t_s \rightarrow 0$, $\sup_{s \in \mathbb{N}} \|z_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty$, and, for every $s \in \mathbb{N}$, $s \geq \bar{s}$, we have $K_s(v_s) \leq K(v) + t_s \sigma_s$ a. e. in Ω_s and $z_s - K_s(z_s) \geq \sigma_s$ a. e. in Ω_s .*

Let for every $s \in \mathbb{N}$, u_s be a function in V_s minimizing the functional $F_s + G_s$ on the set V_s . Then there exist an increasing sequence $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ and a function $u \in V$ such that the function u minimizes the functional $F + G$ on the set V , $\|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \rightarrow 0$, and $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \rightarrow (F + G)(u)$.

Concerning the proof of this theorem and the fulfillment of its conditions, see [1].

References

1. Kovalevsky A. A. Variational problems with unilateral pointwise functional constraints in variable domains // Tr. In-ta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN.—2017.—Vol. 23, № 2.—P. 133–150.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КВАЗИБАНАХОВЫХ РЕШЕТОК

А. Г. Кусраев (Россия, Владикавказ; ВЦ РАН),
Б. Б. Тасоев (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Всюду ниже X — порядково σ -полная векторная решетка, \mathcal{R} — δ -кольцо (= кольцо, замкнутое относительно счетных пересечений) подмножеств произвольного непустого множества Ω . Обозначим символом \mathcal{R}^{loc} совокупность подмножеств $A \subset \Omega$ таких, что $A \cap B \in \mathcal{R}$ для всех $B \in \mathcal{R}$. Тогда семейство \mathcal{R}^{loc} является σ -алгеброй.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение $\mu : \mathcal{R} \rightarrow X_+$ будем называть *мерой*, если $\mu(\emptyset) = 0$ и для любой последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathcal{R}$ такой, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ сходится порядково к $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$; символически

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = o\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) := \bigvee_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \mu(A_k)\right).$$

Тройку $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$ назовем *пространством с векторной мерой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначим символом $\mathbb{B}(\mu)$ фактор-алгебру σ -алгебры \mathcal{R}^{loc} по идеалу пренебрежимых множеств. Мету $\mu : \mathcal{R} \rightarrow X_+$ называют *локализуемой*, если булева алгебра $\mathbb{B}(\mu)$ порядково полна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Интегралом* от \mathcal{R} -ступенчатой функции $f := \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ ($A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$) называется вектор $\int f d\mu := \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$. Положительную \mathcal{R}^{loc} -измеримую функцию $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называют *интегрируемой* (или *о-интегрируемой*), если существует последовательность \mathcal{R} -ступенчатых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что $0 \leq f_n(\omega) \uparrow f(\omega)$ для μ -п.в. $\omega \in \Omega$ и в X существует $\bigvee_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu \in X_+$. При этом полагают (ср. [5, определения 3.1 и 3.2])

$$I_{\mu}^o(f) := \int f d\mu := \bigvee_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Произвольную \mathcal{R}^{loc} -измеримую функцию f называют *интегрируемой* и полагают $I_{\mu}^o(f) := I_{\mu}^o(f^+) - I_{\mu}^o(f^-)$, если интегрируемы f^+ и f^- . Символами $L^0(\mu)$ и $L^1_o(\mu)$ будем обозначать соответственно пространства классов эквивалентности μ -п.в. конечных \mathcal{R}^{loc} -измеримых и μ -интегрируемых функций на Ω .

Пусть E и F — векторные решетки, F порядково полна, G — порядковый идеал в E и $S : G \rightarrow F$ — положительный оператор. Обозначим символом \widehat{G} множество всех $x \in E$ таких, что $\{S(g) : g \in G, 0 \leq g \leq |x|\}$ порядково ограничено в F . Тогда \widehat{G} порядковый идеал в E . Положим по определению

$$\widehat{S}x := \sup \{Sg : g \in G, 0 \leq g \leq x\} := \sup \{S(g \wedge x) : g \in G\} \quad (x \in \widehat{G}_+).$$

Оператор $\widehat{S} : \widehat{G}_+ \rightarrow F$ аддитивен, положительно однороден и, значит, имеет положительное продолжение на \widehat{G} , которое также обозначим символом \widehat{S} и назовем *наименьшим расширением S относительно E* [3, теорема 1.30].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Положим по определению $E := L^0(\mu)$, $G := L^1_o(\mu)$, $S := I^o_\mu$ и пусть $L^1_{ow}(\mu) := \widehat{G}$. Пространство $L^1_{ow}(\mu)$ назовем пространством *слабо o -интегрируемых функций* относительно меры μ . При этом \widehat{I}^o_μ — наименьшее расширение оператора I^o_μ относительно $L^0(\mu)$.

Предположим, что X — порядково полная квазибанахова решетка, см. [4]. Снабдим пространство порядково интегрируемых функций $L^1_o(\mu)$ квазинормой, полагая по определению $\|f\|_o := \|I^o_\mu(|f|)\|_X$ для всех $f \in L^1_o(\mu)$. Аналогично, введем квазинорму в пространстве слабо o -интегрируемых функций $L^1_{ow}(\mu)$ по формуле $\|f\|_{ow} := \|\widehat{I}^o_\mu(|f|)\|_X$ для всех $f \in L^1_{ow}(\mu)$. Тогда $(L^1_o(\mu), \|\cdot\|_o)$ и $(L^1_{ow}(\mu), \|\cdot\|_{ow})$ являются порядково σ -полными квазибанаховыми решетками.

Рассмотрим еще одну конструкцию, чтобы сформулировать основной результат. Пусть X — порядково σ -полная векторная решетка и $\Gamma \subset X$ — полное дизъюнктное множество, т. е. Γ дизъюнктно и $X = \Gamma^{\perp\perp}$. В виду [1, Лемма IV.7.1, Теоремы IV.5.2 и IV.5.3] всякий элемент $x \in X_+$ допускает единственное представление $x = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$, где $0 \leq x_\gamma \in X_\gamma := \{\gamma\}^{\perp\perp}$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Обозначим символом X_Γ множество $x \in X$, имеющих не более счетного множества ненулевых проекций; символически

$$X_\Gamma := \left\{ x \in X : (\exists \nu : \mathbb{N} \rightarrow \Gamma) |x| = \bigvee_{n=1}^{\infty} \pi_{\nu(n)} |x| \right\},$$

где π_γ — порядковый проектор в X на полосу $X_\gamma := \{\gamma\}^{\perp\perp}$. Ясно, что X_Γ порядково плотный идеал в X . Если Γ не более чем счетно, то $X_\Gamma = X$. Сформулируем один из основных результатов из [2].

Теорема 1. Пусть X — порядково полная квазибанахова решетка и Γ — полное дизъюнктное множество в X_+ . Тогда существует пространство $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$ с локализуемой мерой $\mu : \mathcal{R} \rightarrow X_\Gamma$ такое, что интегральный оператор I^o_μ представляет собой изометрический решеточный изоморфизм из $(L^1_o(\mu), \|\cdot\|_o)$ на X_Γ , а наименьшее расширение \widehat{I}^o_μ оператора I^o_μ относительно $L^0(\mu)$ устанавливает изометрический решеточный изоморфизм между $(L^1_{ow}(\mu), \|\cdot\|_{ow})$ и X .

Литература

1. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: ГИФМЛ.—1961.—407 с.
2. Кусраев А. Г., Тасоев Б. Б. Интеграл Канторовича — Райта и представление квазибанаховых решеток // Докл. АН.—2017.—Т. 474, № 1.—С. 1–4.
3. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—London etc.: Acad. Press Inc., 1985.—xix+376 p.
4. Kalton N. J. Quasi-Banach Spaces // Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Vol. 2.—Amsterdam: Elsevier, 2003.—P. 1118–1130.
5. Wright J. D. M. Stone-algebra-valued measures and integrals // Proc. London Math. Soc.—1969.—Vol. 19, № 3.—P. 107–122.

CONVEXITY CONDITIONS FOR
THE SPACE OF REGULAR POLYNOMIALS

Z. A. Kusraeva

(Russia, Vladikavkaz; SMI VSC RAS)

The following duality result is well known: a Banach lattice E is (p, q) -convex (respectively, (p, q) -concave) if and only if the dual space E' is (p', q') -convex (respectively, (p', q') -concave), where $p' = p/(1 - p)$, $q' = q/(1 - q)$ (see Diestel, Jarchow, and Tonge [1, Theorem 16.21]). Duality arguments do not work well in arbitrary quasi-Banach spaces, since it may happen that $E' = \{0\}$. Nevertheless, numbers of concepts and results from the theory of Banach spaces may be extended to the quasi-Banach settings by developing new powerful techniques, see Kalton [2]. The aim is to examine the problem: when is the quasi-Banach lattice of regular polynomials between quasi-Banach lattices (p, q) -convex, or (p, q) -concave, or geometrically convex?

DEFINITION 1. A *quasi-normed space* is a pair $(X, \|\cdot\|)$ where X is a real vector space and $\|\cdot\|$ is a *quasi-norm*, a function from X to \mathbb{R} such that the following conditions hold:

(1) $\|x\| \geq 0$ for all $x \in X$ and $\|x\| = 0$ if and only if $x = 0$.

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ for all $x \in X$ and $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) There exists a constant $C \geq 1$ such that $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$ for all $x, y \in X$.

DEFINITION 2. A *quasi-Banach space* is a quasi-normed space which is complete in its metric uniformity. A quasi-Banach space $(X, \|\cdot\|)$ is called a *quasi-Banach lattice* if, in addition, it is a vector lattice and $|x| \leq |y|$ implies $\|x\| \leq \|y\|$ for all $x, y \in X$.

DEFINITION 3. A quasi-Banach lattice E is said to be (p, q) -convex (Cuartero and Triana [3]) with $0 < p \leq q \leq \infty$ and $p < \infty$, respectively (p, q) -concave if there exists a constant M such that

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q \right)^{1/q} \right\| \leq M \left(\sum_{k=1}^m \|x_k\|^p \right)^{1/p},$$

respectively,

$$\left(\sum_{k=1}^m \|x_k\|^q \right)^{1/q} \leq M \left\| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \right\|$$

for every finite collection $\{x_1, \dots, x_m\}$ in E . The smallest possible constant M is called the (p, q) -convexity constant (respectively (p, q) -concavity constant) and is denoted by $M^{(p,q)}(E)$ (respectively, by $M_{(p,q)}(E)$). In the case when $p = q$ we deal

with p -convexity (respectively, p -concavity) and write $M^{(p)} := M^{(p,p)}$ (respectively, $M_{(p)} := M_{(p,p)}$).

DEFINITION 4. Fix any $s \in \mathbb{N}$. A mapping $P : X \rightarrow Y$ is called a *homogeneous polynomial of degree s* (or *s -homogeneous polynomial*) if there exists an s -linear operator $\varphi : X^s \rightarrow Y$ such that $P = \varphi \circ \Delta_s$, where $\Delta_s : X \rightarrow X^s$ is a *diagonal mapping* $\Delta_s : x \mapsto (x, \dots, x) \in X^s$. There exists a unique symmetric s -linear operator $\check{\varphi}$ with $P = \check{\varphi} \circ \Delta_s$ which is denoted by \check{P} , so that $P(x) = \check{P}(x, \dots, x)$ for all $x \in X$.

DEFINITION 5. A homogeneous polynomial $P : E \rightarrow F$ is said to be *orthogonally additive*, if $P(x + y) = P(x) + P(y)$ holds for all $x, y \in E$ with $|x| \wedge |y| = 0$. Say that P is *orthoregular* if P can be written as a difference of two positive orthogonally additive homogeneous polynomial. Let $\mathcal{P}_o^r({}^sE; F)$ denote the space of all s -homogeneous orthoregular polynomials from E to F .

Theorem 1. *Let E and F be quasi-Banach lattices with F Dedekind complete. Then $\mathcal{P}_o^r({}^sE, F)$ is a (p, q) -concave quasi-Banach lattice for some $1 \leq p, q < \infty$ whenever E is (sp', sq') -convex. Moreover, $M_{(p,q)}(\mathcal{P}_o^r({}^sE, F)) \leq M^{(sq', sp')}(E)$.*

DEFINITION 6. A quasi-Banach lattice $(E, \|\cdot\|)$ is said to have the *Fatou property* (or its norm is *Fatou*) if $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ implies $\|x_\alpha\| \uparrow \|x\|$ for all $x \in E$ and $(x_\alpha) \subset E$.

Theorem 2. *Let E be a quasi-Banach lattice and F be a Dedekind complete quasi-AM-space having the Fatou property. Then $\mathcal{P}_o^r({}^sE, F)$ is a (p, q) -convex quasi-Banach lattice for some $1 \leq p, q < \infty$ whenever E is (sq', sp') -concave with $p' = p/(p-1)$ and $q' = q/(q-1)$. Moreover, $M^{(p,q)}(\mathcal{P}_o^r({}^sE, F)) \leq M^{(\infty)}(F)M_{(sp', sq')}(E)$.*

Theorem 3. *Let E and F be quasi-Banach lattices with F Dedekind complete. If F is geometrically convex then $\mathcal{P}_o^r({}^sE, F)$ is also geometrically convex. Moreover, $M^{(0^+)}(\mathcal{P}_o^r({}^sE, F)) \leq M^{(0^+)}(F)$.*

The proofs of these three results are based on the following two principles. First we apply the linearization theorem for homogeneous polynomials from [4, Theorem 4] and then we apply the same Theorems for a linear case from [5, Theorems 3.3, 3.8].

References

1. Diestel J., Jarchow H., Tonge A. Absolutely Summing Operators.—N. Y.: Camb. Univ. Press, 1995.
2. Kalton N. J. Quasi-Banach Spaces. Handbook of the Geometry of Banach Spaces / Eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss.—Amsterdam: Elsevier, 2003.—P. 1118–1130.
3. Cuartero B., Triana M. A. (p, q) -Convexity in quasi-Banach lattices and applications // Stud. Math.—1986.—Vol. 84, № 2.—P. 113–124.
4. Kusraeva Z. A. Orthogonally additive polynomials on vector lattices // Math. Notes.—2012.—Vol.91, № 5.—P. 704–710.
5. Kusraeva Z. A. Convexity conditions for the space of regular operators // Positivity.—(To appear).

ВЕКТОР-ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА
И ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ПО ПУАССОНУ¹

К. С. Лапин

(Россия, Саранск; МГПИ)

Пусть задана произвольная система дифференциальных уравнений от n переменных

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad F(t, x) = (F_1(t, x), \dots, F_n(t, x))^T, \quad (1)$$

правая часть которой задана и непрерывна в $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$. Кроме того, пусть система уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = f(t, \xi), \quad f(t, \xi) = (f_1(t, \xi), \dots, f_l(t, \xi))^T, \quad (2)$$

где непрерывная вектор-функция $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ удовлетворяет условию Важевского, является системой сравнения для системы (1) с вектор-функцией Ляпунова $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$, т. е. выполнено условие $\dot{V}(t, x) \leq f(t, V(t, x))$.

Далее под $\|\cdot\|$ понимается обычная евклидова норма. Для решения $x = x(t)$ системы (1), проходящего через точку $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, будем использовать запись $x = x(t, t_0, x_0)$. Для любого $t_0 \in \mathbb{R}^+$ через $\mathbb{R}^+(t_0)$ обозначается множество $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq t_0\}$. Любую неотрицательную возрастающую числовую последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = +\infty$, будем называть \mathcal{P} -последовательностью. Для каждой \mathcal{P} -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$ через $M(\tau)$ обозначается множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$. Кроме того, через $a(r)$, $a(t, r)$ и $b(r)$ обозначаются произвольные функции, где $r \geq 0$, $t \geq 0$, обладающие, соответственно, следующими свойствами: $a(r) > 0$ — возрастающая функция, $a(t, r) > 0$ — возрастающая по r функция при каждом фиксированном $t \geq 0$, $b(r) \geq 0$ — неубывающая функция и $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что решения системы (1) равномерно ограничены по Пуассону, если для системы (1) найдется такая \mathcal{P} -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, и для каждого числа $\alpha \geq 0$ существует такое число $\beta > 0$, что для любого решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), где $t_0 \in M(\tau)$ и $\|x_0\| \leq \alpha$, выполнено условие $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta$ при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$. В случае, когда требуется точно указать соответствующую \mathcal{P} -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, будем говорить, что решения системы (1) равномерно ограничены по Пуассону относительно \mathcal{P} -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$.

Теорема 1. Пусть для системы (1) существуют такая \mathcal{P} -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$ и такая вектор-функция Ляпунова $V(t, x)$, что выполнены следующие условия: 1) $V_1(t, x) \geq 0, \dots, V_l(t, x) \geq 0$; 2) $b(\|x\|) \leq \sum_{i=1}^l V_i(t, x) \leq a(\|x\|)$

¹Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации, проект № МК-139.2017.1.

для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$. Кроме того, пусть решения системы сравнения (2) для системы (1) равномерно ограничены по Пуассону относительно \mathcal{P} -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Тогда решения системы (1) равномерно ограничены по Пуассону.

Следствие 1. Пусть для системы (1) существуют \mathcal{P} -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x) \geq 0$, определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, и непрерывная функция $f(t, \xi)$, заданная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) $b(\|x\|) \leq V(t, x) \leq a(\|x\|)$ для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$; 2) $\dot{V}(t, x) \leq f(t, V(t, x))$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$; 3) решения уравнения $\dot{\xi} = f(t, \xi)$ равномерно ограничены по Пуассону относительно \mathcal{P} -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Тогда решения системы (1) равномерно ограничены по Пуассону.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что решения системы (1) эквиограничены по Пуассону, если для этой системы найдется такая \mathcal{P} -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, и для любых $t_0 \in M(\tau)$ и $\alpha \geq 0$ существует такое число $\beta > 0$, что для каждого решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), где $\|x_0\| \leq \alpha$, выполнено условие $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta$ при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$. В случае, когда требуется точно указать соответствующую \mathcal{P} -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, будем говорить, что решения системы (1) эквиограничены по Пуассону относительно \mathcal{P} -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$.

Теорема 2. Пусть для системы (1) существуют такая \mathcal{P} -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$ и такая вектор-функция Ляпунова $V(t, x)$, что выполнены следующие условия: 1) $V_1(t, x) \geq 0, \dots, V_l(t, x) \geq 0$; 2) $b(\|x\|) \leq \sum_{i=1}^l V_i(t, x) \leq a(t, \|x\|)$ для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$. Кроме того, пусть решения системы сравнения (2) для системы (1) эквиограничены по Пуассону относительно \mathcal{P} -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Тогда решения системы (1) эквиограничены по Пуассону.

Следствие 2. Пусть для системы (1) существуют \mathcal{P} -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x) \geq 0$, определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, и непрерывная функция $f(t, \xi)$, заданная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) $b(\|x\|) \leq V(t, x) \leq a(t, \|x\|)$ для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$; 2) $\dot{V}(t, x) \leq f(t, V(t, x))$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$; 3) решения уравнения $\dot{\xi} = f(t, \xi)$ эквиограничены по Пуассону относительно \mathcal{P} -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Тогда решения системы (1) эквиограничены по Пуассону.

Аналогично определениям 1 и 2 даются определения равномерной ограниченности и эквиограниченности решений по Пуассону относительно части переменных, а также относительно части переменных с частичным контролем начальных условий. Получены аналоги указанных выше теорем и следствий для равномерной ограниченности и эквиограниченности решений по Пуассону относительно части переменных, а также относительно части переменных с частичным контролем начальных условий.

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ
КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ,
ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

А. Б. Муравник

(Россия, Воронеж; Концерн «Созвездие»)

Рассматривается задача Коши (с начальной функцией u_0) для уравнения

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{\beta}{u} |\nabla u|^2, \quad (1)$$

возникающего в различных приложениях (см., например, [1, 2]). Предполагается, что $n \geq 3$, а ρ и u_0 — положительные функции, определенные в \mathbb{R}^n .

Доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $u(x, t)$ — классическое ограниченное положительное решение задачи Коши для уравнения (1), где $\beta > -1$, а коэффициент $\rho(x)$ и начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

- (i) уравнение $\Delta u = -\rho(x)$ имеет решение, ограниченное в \mathbb{R}^n ;
- (ii) существует такая константа α из интервала $(0, 1)$, что $\rho \in C_{\text{loc}}^{\alpha+1}(\mathbb{R}^n)$ и $u_0 \in C_{\text{loc}}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Тогда существует такая липшицевая на $[0, +\infty)$ функция A , что $A(0) = 0$, соотношение

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{n-1}} \int_{|x|=R} U_{\beta+1}(x, t) dx = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} A(t)$$

выполняется при каждом положительном t , а соотношение

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{n-1}} \int_{|x|=R} [U_{\beta+1}(x, t) - A(t)] dx = 0$$

выполняется равномерно относительно t из $[0, T]$ для любого положительного T , где

$$U_s(x, t) = \int_0^t u^s(x, \tau) d\tau, \quad s > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие (i) эквивалентно существенной ограниченности свертки $\rho(x)$ с $|x|^{2-n}$.

Литература

1. Kardar M., Parisi G., Zhang Y.-C. Dynamic scaling of growing interfaces // Phys. Rev. Lett.—1986.—Vol. 56.—P. 889–892.
2. Medina E., Hwa T., Kardar M., Zhang Y.-C. Burgers equation with correlated noise: Renormalization group analysis and applications to directed polymers and interface growth // Phys. Rev.—1989.—Vol. A 39.—P. 3053–3075.

ON INVARIANT EINSTEIN METRICS ON LEDGER–OBATA SPACES¹

Yu. G. Nikonorov (Russia, Vladikavkaz; SMI VSC RAS),
Yu. V. Nikonorova (Russia, Volgograd; VETI NRNU “MEPhI”),
Z. Chen (China, Tianjin; NKU)

In this talk we present some recent results on invariant Einstein metrics on Ledger–Obata spaces $F^m/\text{diag}(F)$. In particular, we consider the classification of invariant Einstein metrics Ledger–Obata spaces for $m \leq 4$ and estimations of the number of invariant Einstein metrics on Ledger–Obata spaces for an arbitrary m . A more detailed exposition could be found in our recent paper [1].

The spaces $F^m/\text{diag}(F)$ are called Ledger–Obata spaces, where F is a connected compact simple Lie group, $F^m = F \times F \times \cdots \times F$ (m factors and $m \geq 2$), and $\text{diag}(F) = \{(X, X, \dots, X) | X \in F\}$. Ledger–Obata spaces were first introduced in [2] as a natural generalization of symmetric spaces, since $F^2/\text{diag}(F)$ is an irreducible symmetric space. It is easy to see that $F^m/\text{diag}(F)$ is diffeomorphic to the Lie group F^{m-1} . Our main interest is to study invariant Einstein metrics on Ledger–Obata spaces.

For $m = 2$, we get irreducible symmetric spaces $F^2/\text{diag}(F)$ that admit exactly one Einstein metrics up to homothety and isometry. The case $m = 3$ was completely studied in the paper [4]. In particular, the space $F^3/\text{diag}(F)$ admits exactly two Einstein metrics up to homothety and isometry. In [1], the following theorem is proved.

Theorem 1. *The Ledger–Obata space $F^4/\text{diag}(F)$ admits exactly three invariant Einstein metrics up to isometry and homothety.*

The above results lead to the conjecture that the space $F^{n+1}/\text{diag}(F)$ admits exactly n invariant Einstein metrics up to isometry and homothety. But it is not the case due to the following result from [1].

Theorem 2. *Every Ledger–Obata space $F^{n+1}/\text{diag}(F)$ admits at least $p(n)$ invariant Einstein metrics up to isometry and homothety, where $p(n)$ is the number of integer partitions of n . In particular, there are more than $\frac{1}{13n} \exp\left(\frac{5}{2}\sqrt{n}\right)$ invariant Einstein metrics for all n up to isometry and homothety.*

There is no general explicit formula for $p(n)$, the number of integer partitions of n ($n = k_1 + k_2 + \cdots + k_l$), but some of its value are the following:

$$p(1) = 1, \quad p(2) = 2, \quad p(3) = 3, \quad p(4) = 5, \quad p(5) = 7, \quad p(6) = 11, \\ p(50) = 204226, \quad p(100) = 190569292, \quad p(200) = 3972999029388.$$

¹The project was partially supported by Grant 1452/GF4 of Ministry of Education and Sciences of the Republic of Kazakhstan for 2015–2017 and NSF of China (№ 11571182).

We have also the Hardy–Ramanujan asymptotic formula:

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

In the proof of Theorem 2, we also used the following result of A. Maróti [3]:

$$p(n) > \frac{1}{13n} \exp\left(\frac{5}{2}\sqrt{n}\right) \quad \text{for any } n \geq 1.$$

Let \mathfrak{f} be the Lie algebra of F and let us consider the Lie algebra

$$\mathfrak{g} := n\mathfrak{f} = \underbrace{\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{f} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{f}}_{n \text{ summands}}$$

of the Lie group $G := F^n$, and $\mathfrak{h} := \text{diag}(\mathfrak{f}) = \{(X, X, \dots, X) \mid X \in \mathfrak{f}\} \subset \mathfrak{g}$ for the Lie algebra of $H := \text{diag}(F) \subset G = F^n$.

The basis of our approach in the paper [1] is the observation that the classification of invariant Einstein metrics on every Ledger–Obata space $F^{n+1}/\text{diag}(F)$ is equivalent to the classification of $\text{Ad}(H)$ -invariant Einstein metrics on the Lie group G , i. e. the classification of $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -invariant Einstein metrics on \mathfrak{g} .

Another important tool in our project was the use of computer algebra systems. For instance, the solution of the following auxiliary problem was a very important step in the proof of Theorem 1: to find all the critical points of the function

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2(ux - y)^2 - 2u^2(vx - wy)^2 - w^2(wy - z)^2 - (v^2x - w^2uy + (wu - v)z)^2$$

under the following conditions: $x, y, z > 0$, $xyz = 1$, $u, v, w \in \mathbb{R}$. This problem was solved with using computer calculations, namely, the command `EliminationIdeal` (that eliminates variables from an ideal using a Gröbner basis computation) from Maple.

References

1. *Chen Z., Nikonorov Yu. G., Nikonorova Yu. V.* Invariant Einstein metrics on Ledger–Obata spaces // *Differ. Geome. Appl.*—2017.—Vol. 50.—P. 71–87.
2. *Ledger A. J., Obata M.* Affine and Riemannian s -manifolds // *J. Differ. Geom.*—1968.—Vol. 2.—P. 451–459.
3. *Maróti A.* On elementary lower bounds for the partition function // *Integers*.—2003.—Vol. 3, A 10.—9 p.
4. *Nikonorov Yu. G.* Invariant Einstein metrics on the Ledger–Obata spaces // *St. Petersburg Math. J.*—2003.—Vol. 14, № 3.—P. 487–497.

NONLINEAR AND QUASILINEAR REGRESSION
WITH CLASSPAD-SOFTWARE, USING
THE LEVENBERG–MARQUARDT ALGORITHM

L. Paditz

(Germany, Dresden; HTW Dresden)

1. Introduction

The ClassPad-software by CASIO was introduced in 2003 for a new generation of handheld calculators and simultaneously in the Windows PC (emulator version of the handheld calculator). Meantime several improvements of the software have been appeared. Now we have the ClassPad 400 with the software version 02.01.1000, cp. <http://edu.casio.ru/fx-cp400/> or <https://edu.casio.com>. This nice software is an educational tool in German high schools or universities to support the learning process in mathematics and other fields.

In 2013 in Moscow [5] and 2016 in Yaroslavl [6] the author has given some talks and lectures on using the ClassPad-software in German schools with the goal of introducing this modern tool in teacher education in some Russian pedagogical universities and later in Russian schools to support the learning process of the students with the newest software.

2. Nonlinear and quasilinear Regression

In the ClassPad-software several well-known regression models were implemented, e. g. the logistic regression $y = f(x) = \frac{c}{1+ae^{-bx}}$ or the power regression $y = f(x) = ax^b$. The aim of this communication is the improvement of these regression models in the following manner:

a) the power regression is realized in the CP400 by the help of the quasilinear regression $\ln(y) = \ln(a) + b \ln(x)$ with $F_1(a, b) = \sum_{i=1}^n (\ln(y_i) - \ln(a) - b \ln(x_i))^2 \rightarrow \min$ for a given data set $(x_i, y_i)_{i=1(1)n}$.

We know that the solution (a_o, b_o) of the quasilinear method $\min_{a,b}(F_1(a, b)) = F_1(a_o, b_o)$ is not the optimal solution for $F_2(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^b)^2 \rightarrow \min$ [7]. We get the optimal solution for $\min_{a,b}(F_2(a, b))$ with the CP-software by the help of programming the Levenberg–Marquardt algorithm [1, 3, 4, 8–10].

b) We introduce the more general logistic regression model $y = f(x) = \frac{c}{1+a \cdot e^{-b \cdot x}} + d$ for the CP-software again by programming the Levenberg–Marquardt algorithm.

c) We introduce a new nonlinear regression model, the arctan-regression $y = f(x) = a \arctan(c(x - b)) + d$, for the CP-software again by programming the Levenberg–Marquardt algorithm.

3. Examples

We discuss the power regression with the following connected data set $\text{listx}:=\{1, 2, \dots, 11\}$ and $\text{listy}:=\{0.471, 0.515, \dots, 2.684\}$, cp. [2]. listx contains the years 2005 upto 2015, i. e. 11 years, and listy contains the financial expenses of Germany for the international climate protection in billion euros. With the CP-software (power regression, quasilinear) we get a concave function $y = f(x) = 0.3447x^{0.7783}$ however with the Levenberg–Marquardt algorithm we get the optimal solution (a convex funktion) $y = f(x) = 0.2173x^{1.024}$.

The general logistic regression and arctan-regression respectively we discuss with a real data set $(x_i, y_i)_{i=1(1)50}$, which I got from a teacher of the gymnasium Coswig near to my home town Dresden. The $\text{listx}:=\{1, 2, \dots, 50\}$ contains time points and the $\text{listy}:=\{3.25, 3.35, \dots, 10.13\}$ contains chemical data generated during an experiment in the class room (chemical reaction, pH values). It seems that the general logistic regression is a good statistical model for the given data. Finally the arctan-regression was somewhat better with a smaller mean square error.

4. Discussion

The CP-software allows own programming [8], thus it was possible to introduce the Levenberg–Marquardt algorithm in the ClassPad. We hope that the CASIO company will implement the Levenberg–Marquardt algorithm in the operation system of the calculator with a next update of the software.

References

1. *Dahmen W., Reusken A.* Numerik fuer Ingenieure und Naturwissenschaftler.—Berlin: Springer-Verlag, 2008.
2. Federal Ministry for Economic Cooperation and Development. Klimawandel — Zeit zu handeln.—Berlin, 2016.—P. 15.—URL: https://www.bmz.de/de/mediathek/publikationen/reihen/infobroschueren_flyer/infobroschueren/Materialie262_klimaschutz_konkret.pdf.
3. *Levenberg K.* A Method for the solution of certain problems in least squares // *Quart. Appl. Math.*—1944.—Vol. 2.—P. 164–168.
4. *Marquardt D.* An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters // *SIAM J. Appl. Math.*—1963.—Vol. 11.—P. 431–441.
5. *Paditz L.* Using CAS in Math Education — first experience in Germany with the newest ClassPad technology CP400 // *Moscow State Pedagogical University 29.11.2013: talk of the Internat. Conf. on Math Education Today and Tomorrow.*—URL: <http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/MathEducationMoscow2013.pdf>.
6. *Paditz L.* Opportunities and methods of using ClassPad // *Yaroslavl State Pedagogical University 27.-28.10.2016: invited lectures.*—URL: <http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/MathEducationYaroslavl2016.pdf>.
7. *Paditz L., Aulenbacher G.* Lehr- und Übungsbuch Mathematik. Bd. 3.—Leipzig, 2001.
8. *Paditz L.* Levenberg–Marquardt Programme fuer ClassPad.—Dresden, 2017.—URL: <http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/LM-Programme.pdf>.
9. Portal *Iskusstvennogo Intellekta*, 2014.—URL: <http://neuronus.com/theory/246-algorithm-levenberga-markvardta.html>.
10. *Semyonov E.* Algoritm Levenberga–Markvardta dlya Nelineynogo Metoda Naimen'shikh Kvadratov i yego Realizatsiya na Python, 2016.—URL: <https://habrahabr.ru/post/308626/>.

ORDER UNBOUNDED ORTHOGONALLY ADDITIVE OPERATORS
IN VECTOR LATTICES

M. A. Pliev

(Russia, Vladikavkaz; SMI VSC RAS)

In this talk we introduce a new class of operators in vector lattices. The main objects are orthogonally additive, in general, order unbounded operators. Order bounded orthogonally additive operators in vector lattices which called abstract Urysohn operators first were introduced in 1990 by J. Mazon and S. Segura de Leon [1]. The importance of this class of operators is determined by applications to the theory of nonlinear integral equations of Urysohn and Hammerstein types. Later different classes of orthogonally additive operators in vector lattices and lattice-normed spaces were investigated by many authors.

Let E and F be vector lattices. An orthogonally additive operator $T : E \rightarrow F$ is said to be:

- *positive* if $Tx \geq 0$ holds in F for all $x \in E$;
- *order bounded*, if it maps order bounded sets in E to order bounded sets in F ;
- *laterally-to-order bounded*, if the set $T(\mathcal{F}_x)$ is order bounded in F for every $x \in E$.

Recall that the vector space of all order bounded orthogonally additive operators from E to F is called the space of *abstract Urysohn operators* and denoted by $\mathcal{U}(E, F)$. The order structure of $\mathcal{U}(E, F)$ is subject of intensive investigations in recent years [2–4]. An orthogonally additive, laterally-to-order bounded operator $T : E \rightarrow F$ is called a *Popov operator*.¹

Since \mathcal{F}_x is an order bounded set for every $x \in E$ every abstract Urysohn operator $T : E \rightarrow F$ is a Popov operator.

Theorem. *Let E and F be order ideals in $L_0(\nu)$ and $L_0(\mu)$, respectively with $F \subset L_1(\mu)$ and $T : E \rightarrow F$ be a Popov operator. Then the following statements are equivalent:*

- (1) *T is a generalized Urysohn operator;*
- (2) *Operator $T \in \mathcal{P}(E, F)$ satisfied to the following condition. For every laterally bounded sequence $(u_n) \subset E$, such that $u_n \xrightarrow{\nu} 0$ the sequence $(Tu_n) \subset F$ convergent to zero μ -a.e.*

References

1. Mazón J. M., Segura de León S. Order bounded orthogonally additive operators // Rev. Roumane Math. Pures Appl.—1990.—Vol. 35, № 4.—P. 329–353.
2. Pliev M. Domination problem for narrow orthogonally additive operators // Positivity.—2017.—Vol. 21, № 1.—P. 23–33.
3. Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M., Sobchuk O. Dividing measures and narrow operators // Studia Math.—2015.—Vol. 231.—P. 97–116.
4. Orlov V., Pliev M., Rode D. Domination problem for AM -compact abstract Uryson operators // Arch. Math.—2016.—№ 5.—P. 543–552.

¹This term is introduced in honour of Mikhail Popov who first discovered the lateral order in vector lattices.

УТОЧНЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ КОШИ — БУНЯКОВСКОГО И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

С. М. Ситник

(Россия, Воронеж; ВИ МВД)

Среди нетривиальных обобщений дискретного неравенства Коши — Буняковского [1–2] одним из наиболее известных результатов является теорема Карлица — Элиезера — Дэйкина (CDE) (см. [2–5]), которую мы переформулируем с использованием средних (см. [5–9]).

Теорема CDE. Уточнение дискретного неравенства Коши — Буняковского вида

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n f^2(x_k, y_k) \sum_{k=1}^n g^2(x_k, y_k) \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k^2 \quad (1)$$

выполняется тогда и только тогда, когда величины $f(x, y)$, $g(x, y)$ являются парой произвольных взаимно сопряженных средних [5–9], удовлетворяющих свойствам однородности и монотонности по каждому аргументу.

Данная формулировка в терминах средних делает более понятным оригинальный результат, кроме того снабжает его огромным числом конкретных примеров с использованием многочисленных известных средних [5–6]. Прототипом теоремы CDE послужило известное неравенство Милна [1–5].

Рассмотрим интегральный аналог теоремы CDE.

Теорема 1. Пусть M — произвольное однородное, монотонное по каждому аргументу абстрактное среднее (необязательно симметричное!), $M^* = xy/M(x, y)$ — сопряженное среднее (см. [5–9]). Тогда справедливо обобщение интегрального неравенства Коши — Буняковского вида

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &\leq \int_a^b (M(f, g))^2 dx \int_a^b (M^*(f, g))^2 dx \leq \\ &\leq \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Мои любимые следствия из этой теоремы получаются при выборе арифметико-геометрического среднего Гаусса и максимума–минимума.

Следствие 1. Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &\leq \int_a^b \left[\frac{\max(f, g)}{K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\min(f, g)}{\max(f, g)} \right)^2} \right)} \right]^2 dx \times \\ &\times \int_a^b (\min(f, g))^2 \left(K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\min(f, g)}{\max(f, g)} \right)^2} \right) \right)^2 dx \leq \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx, \end{aligned}$$

где $K(x)$ есть полный эллиптический интеграл Лежандра 1 рода.

Отметим экзотический характер последнего неравенства: это неравенство между произвольными функциями, но которые стоят под знаком конкретной специальной функции — эллиптического интеграла Лежандра!

Следствие 2. Справедливо неравенство (см. [5, 10]):

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b [\max(f, g)]^2 dx \int_a^b [\min(f, g)]^2 dx \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

Для интегрального случая необходимая часть теоремы CDE не выполняется, что следует из существования найденных автором других обобщений неравенства Коши — Буняковского, которые не приводятся к виду (2), а имеют иную структуру.

Рассматриваются приложения полученных результатов к оценкам специальных функций и решений дифференциальных уравнений. Отметим также разработанную А. Г. Кусраевым технику перенесения результатов для числовых неравенств на равномерно полные числовые решетки и операторы в них. В этой ситуации действует так называемый «*принцип переноса*», высказанный автором и доказанный А. Г. Кусраевым для неравенств типа Роджерса — Гельдера — Рисса в [11–12].

Литература

1. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1948.—456 с.
2. Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M. Classical and New Inequalities in Analysis.—Kluwer, 1993.—740 p.
3. Dragomir S. S. Discrete Inequalities of the Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz Type.—Nova Sci. Publ., 2004.—225 p.
4. Steel J. M. The Cauchy–Schwarz Master Class: an Introduction to the Art of Mathematical Inequalities.—Cambridge Univ. Press, 2004.—306 p.
5. Sitnik S. M. Generalized Young and Cauchy–Bunyakowsky Inequalities with Applications: a Survey.—arXiv: 1012.3864v1.—2010.—51 p.
6. Ситник С. М. Уточнения и обобщения классических неравенств // Мат. форум. Т. 3. Исслед. по мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2009.—С. 221–266.—(Итоги науки. ЮФО).
7. Ситник С. М. Обобщения неравенств Коши — Буняковского методом средних значений и их приложения // Чернозем. альманах науч. исслед. Сер. Фундам. математика.—2005.—Т. 1, № 1.—С. 3–42.
8. Ситник С. М. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши — Буняковского // Вестн. Самар. гос. эконом. акад.—2002.—Т. 1, № 8.—С. 302–313.
9. Ситник С. М. Уточнение интегрального неравенства Коши— Буняковского // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2000.—№ 9.—С. 37–45.
10. Ситник С. М. Обобщение неравенства Коши — Буняковского в терминах максимумов и минимумов функций // Мат. форум. Т. 10, ч. 1. Исслед. по мат. анализу, диф. уравнениям и их прилож.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН, 2016.—С. 79–98.—(Итоги науки. Юг России).
11. Kusraev A. G., Buskes G. Representation and extension of orthoregular bilinear operators // Vladikavk. Math. J.—2007.—Vol. 9, № 1.—P. 1–17.
12. Kusraev A. G. Hölder type inequalities for orthosymmetric bilinear operators // Vladikavk. Math. J.—2007.—Vol. 9, № 3.—P. 3–37.

ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ БИЗНЕС-ИНФОРМАТИКИ

Б. С. Тавасиев

(Россия, Владикавказ; Финансовый университет)

В современном мире высшее образование нацелено на подготовку высококвалифицированных специалистов, способных к профессиональной мобильности в условиях информатизации общества. Российское образование призвано обеспечить повышение конкурентоспособности современного специалиста на рынке труда и свободное владение своей профессией на уровне международных стандартов. Современное общество требует новых подходов к подготовке специалистов в различных сферах деятельности. Направление бизнес-информатики одно из современных и перспективных направлений подготовки. Бакалавр бизнес-информатики — это специалист в таких областях как информационные технологии, системы программирования, экономика, менеджмент и право. Сфера деятельности выпускников охватывает значительную часть разных областей деятельности: специалист по информационным ресурсам, системный аналитик, менеджеры информационных технологий, Web-администратор, Web-дизайнер, программист, бизнес-консультант в информационной сфере и т. д. Поэтому содержание обучения должно быть профессионально и коммуникативно направленным. Необходимо четко определять цели обучения, развивать представление студентов о перспективах использования полученных знаний, когда эти знания и умения в будущем смогут повысить их шансы на успех в любом виде деятельности [1, 2].

Профессиональная направленность обучения требует интеграции профильных дисциплин, тщательного отбора содержания учебных материалов, ориентацию на решение практических задач. Учебные материалы должны быть ориентированы на последние достижения в той или иной сфере деятельности, своевременно отражать научные достижения, касающиеся профессиональных интересов обучающихся, давать им возможность для профессионального роста. Кроме того, необходимо максимальное использование современных методик с использованием информационных технологий (расчетно-аналитические работы, деловые игры, телеконференции и т. д.) [2–4].

Значимым фактором, определяющим качество подготовки специалиста бизнес-информатики, является формирование математической грамотности [5]. Математическая подготовка студентов такого направления позволяет формировать ключевые компетенции по профессиональному применению математического инструментария и использования в профессиональной деятельности. Важнейшим элементом современного экономического образования является активное использование математических методов при изучении экономических событий и явлений. Математические модели и методы используются во всех функциональных областях бизнес-информатики, для наиболее эффективного

изучения бизнес-процессов предприятия и прогнозирования их изменения в будущем. На основе изучения математических моделей делаются предположения о поведении различных систем управления и реинжиниринга бизнес-процессов. Правильность управленческого решения зависит от правильности построения математической модели.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что повышение качества математической подготовки будущего специалиста в области бизнес-информатики является важнейшей задачей современного образовательного процесса. В следствии этого возникает потребность разработки новых подходов к процессу обучения и условий при которых этот процесс будет максимально эффективным. Образовательный процесс должен быть направлен на подготовку специалиста соответствующего уровня и профиля, который должен быть конкурентоспособным на рынке труда, и владеть своей профессией.

Литература

1. *Тибилова М. Т., Абаева К. Ю., Волик М. В.* Социальная адаптация первокурсников к университетской жизни // Молодежь и наука: актуальные вопросы социально-экономического развития регионов России. Материалы Всерос. науч.-практ. конф., посвященной 95-летию Финанс. ун-та при Правительстве РФ.—2014.—С. 606–610.
2. *Зайтова Е. З., Волик М. В.* Применение информационных технологий в организации самостоятельной работы студентов // Экономика России в условиях глобализации: вызовы и возможности развития. Сб. науч. тр. по материалам Междунар. науч. конф. (в рамках VI Междунар. науч. студ. конгр. на тему: «Гражданское общество России: становление и пути развития»).—2015.—С. 258–262.
3. *Волик М. В., Бердиев Р. Т.* Информационные технологии и их место в образовании и бизнесе // Современные информационно-образовательные технологии в интересах социально-экономического развития России. Междунар. заоч. науч.-метод. конф.—2016.—С. 35–40.
4. *Волик М. В.* Об аспектах профессионально-ориентированного обучения студентов по направлению «Бизнес-информатика» // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование: тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН, 2016.—С. 221–222.
5. *Полонский Е. В.* Качество математической подготовки современного специалиста среднего звена: теоретический аспект (на примере специальности «Операционная деятельность в логистике») // Науч.-метод. электр. журн. «Концепт».—2016.—Т. 17.—С. 244–248.

Секция I

Математический анализ

ТЕОРЕМА ИОСИДЫ — ХЬЮИТТА
ДЛЯ МАЖОРИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ УРЫСОНА

Н. М. Абасов

(Россия, Москва; МАИ (НИУ))

Ортогонально аддитивные операторы в решеточно-нормированных пространствах были впервые введены в работе [1]. Дальнейший прогресс в данном направлении представлен в [2, 3]. В настоящей заметке мы укажем операторное обобщение известного классического результата из теории меры. Приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для понимания смысла основного результата. Развернутыми источниками для ссылок по теории векторных решеток и решеточно-нормированных пространств являются монографии [4, 5].

Пусть V — действительное векторное пространство и E — действительная, архимедова векторная решетка. Отображение $|\cdot| : V \rightarrow E_+$ называется *векторной нормой*, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

- 1) $|v| \geq 0$, $|v|s = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ($v \in V$);
- 2) $|v_1 + v_2| \leq |v_1| + |v_2|$ ($v_1, v_2 \in V$);
- 3) $|\lambda v| = |\lambda||v|$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$).

Векторная норма называется *разложимой*, если

- 4) для любых $e_1, e_2 \in E_+$ и $x \in V$ из представления $|x| = e_1 + e_2$ следует существование $x_1, x_2 \in V$ таких, что $x = x_1 + x_2$ и $|x_k| = e_k$ ($k := 1, 2$).

Тройка $(V, |\cdot|, E)$ ((V, E) , $(V, |\cdot|)$ или даже V для краткости) называется *решеточно-нормированным пространством*, если $|\cdot|$ — это E -значная векторная норма, заданная на V . Если векторная норма $|\cdot|$ разложима, то пространство V также называется *разложимым*. Будем говорить, что сеть $(v_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ *(bo)-сходится* к элементу $v \in V$ и писать $v = (bo) - \lim v_\alpha$, если существует убывающая сеть $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ в E_+ такая, что $\inf_{\gamma \in \Gamma} (e_\gamma) = 0$ и для любого $\gamma \in \Gamma$ существует индекс $\alpha(\gamma) \in \Delta$ такой, что $|v - v_{\alpha(\gamma)}| \leq e_\gamma$ для любого $\alpha \geq \alpha(\gamma)$. Сеть $(v_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ называется *(bo)-фундаментальной*, если сеть $(v_\alpha - v_\beta)_{(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta}$ *(bo)-сходится* к нулю. Решеточно-нормированное пространство называется *(bo)-полным*, если каждая *(bo)-фундаментальная* сеть *(bo)-сходится* к элементу этого пространства. Разложимое, *(bo)-полное* решеточно-нормированное пространство называется *пространством Банаха — Канторовича*.

Элемент y решеточно-нормированного пространства (V, E) называется *осколком* элемента $x \in V$, если $|y| \perp |x - y|$. Запись $y \sqsubseteq x$ выражает тот факт, что y — осколок x . Пусть (V, E) — решеточно-нормированное пространство. Сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset V$ называется *латерально сходящейся* к $x \in V$, если $x_\alpha \sqsubseteq x_\beta \sqsubseteq x$ для любых индексов $\alpha < \beta$ и $x_\alpha \xrightarrow{\text{bo}} x$. В этом случае будем писать $x_\alpha \xrightarrow{\text{lat}} x$.

Пусть (W, F) — другое решеточно-нормированное пространство. Ортогонально аддитивный оператор $T : V \rightarrow W$ называется *латерально непрерывным*, если из соотношения $x_\alpha \xrightarrow{\text{lat}} x$ следует, что $Tx_\alpha \xrightarrow{\text{bo}} Tx$.

Мажорируемый оператор Урысона называется *латерально сингулярным*, если он дизъюнктен всем латерально непрерывным, мажорируемым оператором Урысона. Полосы латерально непрерывных и сингулярных мажорируемых операторов Урысона из V в W обозначаются через $\mathcal{D}_U^c(V, W)$ и $\mathcal{D}_U^s(V, W)$ соответственно. Сформулируем теперь результат.

Теорема. Пусть (V, E) — разложимое решеточно-нормированное пространство и пусть (W, F) — пространство Банаха — Канторовича. Тогда каждый мажорируемый оператор Урысона $T : V \rightarrow W$ допускает единственное представление $T = T_c + T_s$, где $T_c \in \mathcal{D}_U^c(V, W)$ и $T_s \in \mathcal{D}_U^s(V, W)$. Кроме того

$$|T| = |T_c| + |T_s|, \quad |T_c| = |T|_c, \quad |T_s| = |T|_s.$$

Литература

1. Кусраев А. Г., Плиев М. А. Ортогонально аддитивные операторы в решеточно нормированных пространствах // Владикавк. мат. журн.—1999.—Т. 1, № 3.—С. 33–43.
2. Абасов Н. М., Плиев М. А. О продолжении мажорируемых операторов Урысона // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 1.—С. 3–8.
3. Abasov N. M., Pliev M. A. Order properties of the space of dominated Uryson operators // Internat. J. Math. Anal.—2015.—Vol. 9, № 45.—P. 2211–2219.
4. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—624 с.
5. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—Dordrecht: Springer, 2006.—376 p.

ON EVOLUTION OF INVARIANT RIEMANNIAN METRICS
ON SOME GENERALIZED WALLACH SPACES¹

N. A. Abiev

(Kazakhstan, Taraz; TarSU)

In the papers [2] and [3] the authors studied the normalized Ricci flow equation

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g}(t) = -2 \operatorname{Ric}_{\mathbf{g}} + 2\mathbf{g}(t) \frac{S_{\mathbf{g}}}{n}$$

on one special class of Riemannian manifolds M^n called generalized Wallach spaces (or three-locally-symmetric spaces in other terms) according to the definitions of [6] and [9], where $\mathbf{g}(t)$ means a 1-parameter family of Riemannian metrics, $\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}$ is the Ricci tensor and $S_{\mathbf{g}}$ is the scalar curvature of the Riemannian metric \mathbf{g} . Generalized Wallach spaces are characterized as compact homogeneous spaces G/H whose isotropy representation decomposes into a direct sum $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{p}_3$ of three $\operatorname{Ad}(H)$ -invariant irreducible modules satisfying $[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i] \subset \mathfrak{h}$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) [6, 7]. Note that the complete classification of generalized Wallach spaces is obtained in the papers [5] and [8] independently. For a fixed bi-invariant inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on the Lie algebra \mathfrak{g} of the Lie group G , any G -invariant Riemannian metric \mathbf{g} on G/H is determined by an $\operatorname{Ad}(H)$ -invariant inner product

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = x_1 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_1} + x_2 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_2} + x_3 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_3}, \quad (1)$$

where x_1, x_2, x_3 are positive real numbers. Metrics with pairwise distinct x_i , $i = 1, 2, 3$, we call *generic*. A given generalized Wallach space can be determined by special parameters $a_i := A/d_i \in [0, 1/2]$, where $d_i := \dim(\mathfrak{p}_i)$, $i = 1, 2, 3$, and A is some special non-negative number (see details in [6, 7]).

The aim of the talk is to discuss the following result obtained in [1].

Theorem 1. *On a generalized Wallach space G/H with $a_1 = a_2 = a_3 := a = 1/4$ the normalized Ricci flow evolves all generic metrics into metrics with positive Ricci curvature.*

It should be noted that Theorem 1 completes the following theorems proved in [4].

Theorem 2. *Let G/H be a generalized Wallach space with $a_1 = a_2 = a_3 =: a$, where $a \in (0, 1/4) \cup (1/4, 1/2)$. If $a < 1/6$, then the normalized Ricci flow evolves all generic metrics with positive Ricci curvature into metrics with mixed Ricci curvature. If $a \in (1/6, 1/4) \cup (1/4, 1/2)$, then the normalized Ricci flow evolves all generic metrics into metrics with positive Ricci curvature.*

¹The project was supported by the Grant of MES of the Republic of Kazakhstan for 2015–2017, project № 1452/GF4.

Theorem 3. *Let G/H be a generalized Wallach space with $a_1 = a_2 = a_3 = 1/6$. Suppose that it is supplied with the invariant Riemannian metric (1) such that $x_k < x_i + x_j$ for all indices with $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, then the normalized Ricci flow on G/H with this metric as the initial point, preserves the positivity of the Ricci curvature.*

The author is indebted to Prof. Yuriĭ Nikonorov for helpful discussions.

References

1. Abiev N. A. On evolution of invariant Riemannian metrics on one class of generalized Wallach spaces under the normalized Ricci flows // *Mat. Tr.*—2017. —Vol. 20, № 1.—P. 3–20.— (Russian).
2. Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P. The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces // *Differ. Geom. Appl.*—2014.—Vol. 35, Supplement.—P. 26–43.
3. Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P. The Ricci flow on some generalized Wallach spaces // *Geometry and its Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics.* —Cham: Springer, 2014. —P. 3–37.
4. Abiev N. A., Nikonorov Yu. G. The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow // *Ann. Glob. Anal. Geom.*—2016.—Vol. 50, № 1.—P. 65–84.
5. Chen Z., Kang Y., Liang K. Invariant Einstein metrics on three-locally-symmetric spaces // *Comm. Anal. Geom.*—2016.—Vol. 24, № 4.—P. 769–792.
6. Lomshakov A. M., Nikonorov Yu. G., Firsov E. V. Invariant Einstein metrics on three-locally-symmetric spaces // *Siberian Adv. Math.*—2004.—Vol. 14, № 3.—P. 43–62.
7. Nikonorov Yu. G. On a class of homogeneous compact Einstein manifolds // *Siberian Math. J.*—2000.—Vol. 41, № 1.—P. 168–172.
8. Nikonorov Yu. G. Classification of generalized Wallach spaces // *Geom. Dedicata.*—2016.—Vol. 181, № 1.—P. 193–212.
9. Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavskii V. V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // *J. Math. Sci. (New York).*—2007.—Vol. 146, № 7.—P. 6313–6390.

КРИТЕРИЙ СЮРЪЕКТИВНОСТИ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ
НА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
В ВЫПУКЛЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ¹

Т. М. Андреева

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Пусть G — выпуклая ограниченная область в \mathbb{C} , $H(G)$ — пространство всех функций, аналитических в G , а $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая по n последовательность неотрицательных выпуклых монотонно возрастающих функций на $(t_0, +\infty)$ ($t_0 \geq 0$).

С каждым весом $v_n, n \in \mathbb{N}$, свяжем соответствующее банахово пространство

$$H_{v_n}(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_{v_n} := \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{e^{v_n(z)}} < \infty \right\}$$

и образуем индуктивный предел $\mathcal{V}H(G) := \text{ind } H_{v_n}(G)$.

Пусть, далее, μ — аналитический функционал в \mathbb{C} с носителем в K , где K — некоторое выпуклое компактное подмножество. При некоторых ограничениях на весовую последовательность, подобных использованным в работе В. В. Напалкова [1], исследуется вопрос о непрерывности и сюръективности оператора свертки $\mu * f(z) : f \mapsto \mu_w f(z + w)$, действующего из $\mathcal{V}H(G + K)$ в (на) $\mathcal{V}H(G)$.

Обозначим $v_n^*(|\zeta|) := \inf_{0 < t < r} [\zeta|t + v_n(\ln \frac{1}{t})]$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, где $r := \min_{\zeta \in S} H_G(\zeta)$, $H_G(\zeta) := \sup_{\lambda \in G} \text{Re} \lambda \zeta$ — опорная функция области G , S — единичная окружность в \mathbb{C} . Тогда преобразование Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между $(\mathcal{V}H(G))'_b$ и пространством

$$\mathcal{V}H_G := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : |f|_n := \sup_{\zeta \in \mathbb{C}} \frac{|f(\zeta)| e^{v_n^*(|\zeta|)}}{e^{H_G(\zeta)}} < \infty, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

С помощью такого описания сопряженных с $\mathcal{V}H(G + K)$ и $\mathcal{V}H(G)$ весовых пространств целых функций заданного роста ответ на вопрос о непрерывности и сюръективности оператора свертки дается в терминах свойств преобразования Лапласа $\hat{\mu}(\zeta) := \mu_z e^{z\zeta}$ функционала μ .

Обозначим также

$$\mathcal{V}H_K^{\infty} := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : \sup_{\zeta \in \mathbb{C}} \frac{|f(\zeta)|}{e^{H_K(\zeta) + v_m^*(|\zeta|) - v_n^*(|\zeta|)}} < \infty \right\}.$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-01404.

Теорема 1. Для любого нетривиального функционала μ с $\hat{\mu} \in \mathcal{V}H_K^\infty$

(i) оператор свертки $\mu* : \mathcal{V}H(G + K) \rightarrow \mathcal{V}H(G)$ непрерывен и обладает плотным образом;

(ii) оператор умножения $\Lambda_{\hat{\mu}} : f \in \mathcal{V}H_G \rightarrow \hat{\mu}f \in \mathcal{V}H_{G+K}$ сопряжен оператору свертки.

Теорема 2. Пусть μ — аналитический функционал и $\hat{\mu} \in \mathcal{V}H_K^\infty$. Рассмотрим следующие предположения:

(i) оператор свертки $\mu* : \mathcal{V}H(G + K) \rightarrow \mathcal{V}H(G)$ является сюръективным;

(ii) для любого $p \in \mathbb{N}$ существуют $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что

$$\sup_{\zeta \in \mathbb{C}} \frac{|f(\zeta)|}{e^{H_G(\zeta) - v_p^*(|\zeta|)}} \leq C \sup_{\zeta \in \mathbb{C}} \frac{|\hat{\mu}(\zeta)| |f(\zeta)|}{e^{H_{G+K}(\zeta) - v_m^*(|\zeta|)}}, \quad \forall f \in \mathcal{V}H_G;$$

(iii) преобразование Лапласа $\hat{\mu}$ функционала μ принадлежит множеству всех делителей из $\mathcal{V}H_{G+K}$ в $\mathcal{V}H_G$.

Тогда (iii) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (i).

Интерес представляет импликация (i) \Rightarrow (iii). Для частного случая весовой последовательности $v_n(z) = n|z|^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in G$, где $0 < \alpha < 1$, для операторов свертки при дополнительных условиях на $\hat{\mu}$ имеет место критерий сюръективности, а именно, справедлива

Теорема 3. Пусть μ — аналитический функционал в \mathbb{C} с носителем в выпуклом компактном множестве K и $\hat{\mu} \in \mathcal{V}H_K^\infty$; G — выпуклая ограниченная область. Оператор свертки $\mu* : \mathcal{V}H(G + K) \rightarrow \mathcal{V}H(G)$ сюръективен тогда и только тогда, когда радиальный индикатор $h_{\hat{\mu}}$ преобразования Лапласа функционала μ совпадает с опорной функцией H_K компакта K и, кроме того, существуют числа $s, N > 0$ такие, что для каждой точки $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| > N$ найдется $\zeta' \in \mathbb{C}$ с $|\zeta' - \zeta| < |\zeta|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$:

$$\log |\hat{\mu}(\zeta')| \geq h_{\hat{\mu}}(\zeta) - s|\zeta|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

Ранее подобные результаты были получены в [2] для пространств функций, аналитических в выпуклых областях и обладающих полиномиальным ростом вблизи границы области, т. е. для весов вида $v_n(z) = n \ln(1 + |z|)$.

Литература

1. Напалков В. В. Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы // Изв. РАН. Сер. мат.—1987.—Т. 51, № 2.—С. 287–305.
2. Abanin A. V., Ishimura R., Khoi L. H. Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains // Ark. Mat.—2012.—Vol. 50, № 1.—С. 1–22.

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ СТРУКТУРЫ
НА СПЕЦИАЛЬНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ГРУППАХ ГЕЙЗЕНБЕРГА¹

В. В. Балащенко (Беларусь, Минск; БелГУ),
О. Н. Радиванович (Беларусь, Минск; БелГУ)

Метрические f -структуры ($f^3 + f = 0$, $g(fX, Y) + g(X, fY) = 0$) на римановых многообразиях (M, g) являются естественным обобщением почти эрмитовых структур J ($J^2 = -id$, $g(JX, JY) = g(X, Y)$) и входят в обширную концепцию обобщенной эрмитовой геометрии [1]. К числу важнейших классов метрических f -структур относятся приближенно келеровы f -структуры (NKf -структуры), определяемые условием $\nabla_{fX}(f)fX = 0$, а также эрмитовы f -структуры (Hf -структуры), которые задаются требованием $T(X, Y) = 0$, где ∇ — связность Леви-Чивита метрики g , а T — композиционный тензор f -структуры, имеющий следующий вид (см. [1, 2]):

$$T(X, Y) = \frac{1}{4} f (\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y).$$

Оказалось, что канонические f -структуры на однородных k -симметрических пространствах позволяют предъявить обширный ресурс инвариантных NKf -структур, Hf -структур, а также структур иных классов в обобщенной эрмитовой геометрии [2, 3]. Важную роль здесь играют левоинвариантные структуры на нильпотентных группах Ли, среди которых особо можно выделить разного типа обобщения классической 3-мерной группы Гейзенберга. Первыми примерами в этом направлении стали канонические f -структуры на 6-мерной обобщенной (в смысле А. Каплана) группе Гейзенберга, реализованной как однородное риманово 4- и 6-симметрическое пространство [2, 4]. Напомним в связи с этим следующую конструкцию: заданный на алгебре Ли \mathfrak{g} автоморфизм θ порядка 4 ($\theta^4 = id$), не имеющий (нетривиальных) неподвижных векторов, порождает на соответствующей связной односвязной группе Ли G единственную (с точностью до знака) каноническую левоинвариантную f -структуру, задаваемую формулой $f = \frac{1}{2}(\theta - \theta^3)$ [2, 3]. Если же автоморфизм θ имеет порядок 6, то на группе Ли G возникают уже 4 (с точностью до знака) канонические левоинвариантные f -структуры [2, 4]:

$$f_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} (\theta + \theta^2 - \theta^4 - \theta^5), \quad f_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} (\theta - \theta^2 + \theta^4 - \theta^5), \quad f_3 = f_1 + f_2, \quad f_4 = f_1 - f_2.$$

В работе [5] идея построения канонических левоинвариантных f -структур реализована для 5-мерной матричной группы Гейзенберга $H(2, 1)$ с помощью

¹Работа выполнена при частичной поддержке государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2020» (2016–2020), подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем», проект «Геометрические структуры на алгебраических, топологических, гладких многообразиях и группах Ли».

специальных автоморфизмов порядков 4 и 6 на алгебре Гейзенберга $\mathfrak{h}(2, 1)$, которая задается коммутаторными соотношениями $[e_1, e_4] = [e_2, e_5] = e_3$. Была доказана эрмитовость всех построенных канонических f -структур и указаны те из них, которые являются интегрируемыми.

Продолжая эти исследования, на алгебре Гейзенберга $\mathfrak{h}(2, 1)$ нами построен иной изометрический автоморфизм φ порядка 6:

$$\varphi(e_1) = -e_2, \quad \varphi(e_2) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_4, \quad \varphi(e_3) = -e_3, \quad \varphi(e_4) = e_5, \quad \varphi(e_5) = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_4.$$

Используя этот автоморфизм, доказана следующая

Теорема. *Все канонические левоинвариантные f -структуры f_i , $i = \overline{1, 4}$ на 5-мерной группе Гейзенберга $H(2, 1)$, построенные с помощью автоморфизма φ порядка 6, являются эрмитовыми f -структурами. При этом структуры f_1, f_2, f_3 являются приближенно келеровыми f -структурами, а f_4 этим свойством не обладает. Кроме того, структуры f_1 и f_2 интегрируемы, а f_3 и f_4 — нет.*

Интересным является обобщение классической группы (и алгебры) Гейзенберга, реализуемое с помощью блочных матриц. Рассмотрен пример 8-мерной группы Ли этого типа, алгебра Ли которой определяется коммутаторами следующего вида:

$$[e_1, e_5] = [e_2, e_7] = e_3, \quad [e_1, e_6] = [e_2, e_8] = e_4.$$

Было построено однопараметрическое семейство автоморфизмов ψ_α порядка 4 для этой алгебры Ли. Оказалось, что ни одна из соответствующего однопараметрического семейства канонических левоинвариантных f -структур вида $f_\alpha = \frac{1}{2}(\psi_\alpha - \psi_\alpha^3)$ не принадлежит ни к одному из отмеченных выше (и иных) классов обобщенной эрмитовой геометрии, а также все они не интегрируемы. Такая ситуация для известных нам примеров обобщенных групп Гейзенберга наблюдается впервые.

Литература

1. Кириченко В. Ф. Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1983.—Т. 47, № 6.—С. 1208–1223.
2. Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
3. Балащенко В. В., Степанов Н. А. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ -пространствах // Мат. сб.—1995.—Т. 186, № 11.—С. 3–34.
4. Balashchenko V. V. Invariant structures on the 6-dimensional generalized Heisenberg group // Kragujevac J. Math.—2011.—Vol. 35, № 2.—P. 209–222.
5. Балащенко В. В., Дубовик П. А. Левоинвариантные f -структуры на 5-мерной группе Гейзенберга $H(2, 1)$ // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Физика, математика, информатика.—2013.—№ 3.—С. 112–117.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СУММИРУЕМЫХ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ¹

Х. Х. Бурчаев (Россия, Грозный; ЧГУ),
В. Г. Рябых(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Г. Ю. Рябых(Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} = \partial D$; $B = L_p(\mathbb{T})(L_p(D))$, $\mathcal{A} = H_p(A_p)$ — пространство Харди (Бергмана); $A(R)$ — функции, аналитические в круге радиуса $R > 1$.

Для $w \in B$ изучается задача о

$$\chi \in \mathcal{A} : \min_{x \in \mathcal{A}} \|w - x\| = \|w - \chi\|.$$

Теорема 1. Если $B = L_p(\mathbb{T})$, $\mathcal{A} = H_p$, $1 < p < \infty$ и $w = \bar{\omega}$, где $\omega \in A(R)$, то $\chi \in A(R)$.

Теорема 2. Если $B = L_p(D)$, $\mathcal{A} = A_p$, $1 \leq p < \infty$ и $w = \bar{\omega}$, где $\omega \in A(R)$, то $\chi \in A(R)$.

Теорема 3. Если $B = L_p(D)$, $\mathcal{A} = A_p$, $1 < p \leq p_1 < 2$ и $w = (1 - |z|)\bar{\omega}$, где $\omega \in A_p$, то $\chi \in \bigcap_{\gamma < p_*} H_\gamma$, $p_* = 2/(2 - p_1)$.

Доказательства теорем 1 и 2 проводятся методом погружения H_p и A_p в более широкий класс. В теореме 3 используются интегро-дифференциальные свойства функций, принадлежащих H_p . При $1 < p < 2$ теорема 1 доказана в [1]. Метод вложения впервые применен в [2] при $1 < p < \infty$ и $\bar{w} = \omega$ — алгебраический полином.

Разработанный метод имеет приложения к исследованию ряда экстремальных задач в пространствах аналитических функций.

Литература

1. Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю. Об одной экстремальной задаче в H_p , $0 < p < \infty$ // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 3.—С. 392–404.
2. Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю. Аналитичность в \mathbb{C} экстремальных функций функционала, образованного полиномом над пространством Бергмана // Мат. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 204–214.—(Итоги науки. Юг России).

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-00331.

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ,
ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫХ
ПОЛИНОМАМИ ЛАГЕРРА

Р. М. Гаджимирзаев
(Россия, Махачкала; ДНЦ РАН)

Рассматривается система полиномов $l_{r,n}^\alpha(x)$ (r — натуральное число, $n = 0, 1, \dots$), введенная в работах [1, 2], ортонормированная при $\alpha > -1$ относительно скалярного произведения Соболева следующего вида:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^\infty f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t) dt,$$

где $\rho(t)$ — весовая функция, определенная равенством $\rho(t) = t^\alpha e^{-t}$.

Полиномы $l_{r,n}^\alpha(x)$, порожденные классическими ортонормированными полиномами Лагерра $l_n^\alpha(x)$ ($n = 0, 1, \dots$), определяются с помощью равенств

$$l_{r,n}^\alpha(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, r-1.$$

$$l_{r,r+n}^\alpha(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} l_n^\alpha(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots$$

В работах [1, 2] получены следующие представления для полиномов $l_{r,r+n}^\alpha(x)$:

$$l_{r,r+n}^\alpha(x) = \frac{1}{(h_n^\alpha)^{1/2}} \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{x^{\nu+r}}{\nu!(\nu+r)^{[r]}}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$l_{r,r+n}^\alpha(x) = \frac{(-1)^r}{\sqrt{h_n^\alpha}} \left[L_{n+r}^{\alpha-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{B_{n,\nu}^\alpha x^\nu}{\nu!} \right],$$

где $L_n^\alpha(x)$ — классические полиномы Лагерра,

$$h_n^\alpha = \Gamma(\alpha+1) \binom{n+\alpha}{n}, \quad B_{n,\nu}^\alpha = \{L_{n+r}^{\alpha-r}(t)\}_{t=0}^{(\nu)} = \frac{(-1)^\nu \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(n+r-\nu)!}.$$

Хорошо известно, что в исследовании систем ортогональных полиномов важную роль играют рекуррентные соотношения, которые являются одним из способов задания систем ортогональных полиномов. В настоящей работе для полиномов $l_{r,n}^\alpha(x)$ получены рекуррентные соотношения, которые могут быть использованы для изучения различных свойств этих полиномов и вычисления их значений при любых x и n .

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

$$l_{r,n}^{\alpha}(x) = \frac{x}{n} l_{r,n-1}^{\alpha}(x), \quad 1 \leq n \leq r-1,$$

$$b_n(\alpha) r l_{r+1,r+n}^{\alpha}(x) = l_{r,r+n}^{\alpha}(x) + [b_n(\alpha)x - a_n(\alpha)] l_{r,r+n-1}^{\alpha}(x) + c_n(\alpha) l_{r,r+n-2}^{\alpha}(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$a_n(\alpha) = (2n + \alpha - 1) \sqrt{\frac{n}{n + \alpha}}, \quad b_n(\alpha) = \sqrt{\frac{n}{n + \alpha}}, \quad c_n(\alpha) = \sqrt{\frac{n(n-1)(n + \alpha - 1)}{n + \alpha}}.$$

Литература

1. Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д., Гаджимирзаев Р. М. Системы функций, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева с дискретными массами, порожденных классическими ортогональными системами // Дагест. электр. мат. изв.—2016.—Вып. 6.—С. 31–60.
2. Шарапудинов И. И., Магомед-Касумов М. Г. О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра // Диф. уравнения.—2017.—Т. 53, № 10.—(Принята к печати).

О НЕКОТОРЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРАХ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ К ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Ф. Н. Гарифьянов (Россия, Казань; КГЭУ),
Е. В. Стрежнева (Россия, Казань; КНИТУ–КАИ)

В докладе рассматриваются четырехэлементные разностные уравнения с постоянными коэффициентами в классе функций, голоморфных вне квадрата и исчезающих на бесконечности. Исследуются свойства биортогональных разложений, порождаемых соответствующими разностными операторами. Указаны приложения к проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа.

Пусть D — квадрат с вершинами $t_1 = -t_3 = -2^{-1}(1+i)$, $t_2 = -t_4 = 2^{-1}(1-i)$ и сторонами ℓ_j , $j = \overline{1, 4}$, пронумерованными в порядке положительного обхода границы ($t \in \ell_1 \Rightarrow \operatorname{Im} t = -2^{-1}$). Функции $\sigma_j(z) = z + i^j$ являются порождающими преобразованиями (или обратными к ним) двоякопериодической группы по примитивным периодам 1 и i .

Рассмотрим линейное разностное уравнение (л. р. у.) с постоянными коэффициентами

$$(Vf)(z) \equiv \sum_{j=1}^4 \lambda_j f[\sigma_j(z)] = g(z), \quad z \in D, \quad (1)$$

при следующих предположениях.

1) Функция $f(z)$ голоморфна вне \overline{D} , $f(\infty) = 0$ и ее граничное значение $f^-(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на любом компакте, не содержащем вершин. Такой класс решений обозначим через B .

2) Свободный член $g(z)$ голоморфен в D и его граничное значение $g^+(t) \in H_\lambda(\partial D)$.

3) $\forall j \lambda_j \neq 0$.

4) В вершинах у решения допускаются, самое большее, логарифмические особенности.

Условие 3) обеспечивает нетривиальность задачи. Пусть, например, $\lambda_1 = 0$. Множество $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=2}^4 \sigma_k^{-1}(\overline{D})$ связно, и функция $g(z)$ обязана быть аналитически продолжимой из D в некоторую окрестность бесконечно удаленной точки, причем $g(\infty) = 0$. Остается применить к л. р. у. (1) преобразование Бореля [1, гл. 1, § 1]. Тогда (1) $\Rightarrow h(z)F(z) = G(z)$, где $F(z)$ и $G(z)$ — верхние функции, ассоциированные по Борелю с нижними функциями $f(z)$ и $g(z)$, а $h(z) = \lambda_2 \exp(z) + \lambda_3 \exp(iz) + \lambda_4 \exp(-z)$ — характеристический квазиполином. В нулях квазиполинома целая функция $G(z)$ должна иметь нули не меньшей кратности. Если это выполнено, то функцию $f(z)$ можно найти в явном виде, и остается лишь проверить, что $f(z) \in B$. Поэтому впредь нормируем уравнение (1) условием $\lambda_1 = 1$.

Условие 4) обеспечивает конечность фундаментальной системы решений (ф. с. р.) однородного уравнения. Иначе бы $(Vf)(z) = 0, z \in D \Rightarrow (Vf^{(k)})(z) = 0$,

$z \in D$, а любая система производных функции $f(z)$ не может быть линейно зависима в силу определения класса B .

Два частных случая л. р. у. (1) ($\forall j \lambda_j = 1$ — случай I, $\lambda_3 = 1, \lambda_2 = \lambda_4 = -1$ — случай II) были ранее исследованы в статье [2]. Свойства биортогональных разложений, связанных с этими случаями, изложены в [3–4].

С помощью предложенного метода регуляризации л. р. у. (1) при дополнительном ограничении на коэффициенты

$$\lambda_3 = \lambda_2 \lambda_4 \quad (2)$$

проведено полное исследование л. р. у. (1) при $\lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = -1$ (случай III) и установлено, что оно безусловно разрешимо. Рассматриваются различные биортогональные разложения, связанные со случаем III. Отметим, что он принципиально отличен от случаев I и II. Указаны приложения задачи (1) к проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа (ц. ф. э. т.).

Литература

1. Бибербах Л. Аналитическое продолжение.—М.: Наука, 1967.—240 с.
2. Гарифьянов Ф. Н. Проблема обращения особого интеграла и разностные уравнения для функций, аналитических вне квадрата // Изв. вузов. Математика.—1993.—№ 7.—С. 7–16.
3. Гарифьянов Ф. Н. Трансформации биортогональных систем и некоторые их приложения, I // Изв. вузов. Математика.—1996.—№ 6.—С. 5–16.
4. Гарифьянов Ф. Н. Трансформации биортогональных систем и некоторые их приложения, II // Изв. вузов. Математика.—1996.—№ 8.—С. 13–24.
5. Чибрикова Л. И. О граничных задачах для прямоугольника // Учен. зап. Казан. гос. ун-та.—Казань: Изд-во КГУ, 1963.—С. 15–39.
6. Аксентьева Е. П. Функции Вейерштрасса в краевых задачах.—Казань: Изд-во КГУ, 1994.—42 с.
7. Агаев Г. Н. К теории сингулярного уравнения в пространствах Банаха // Тр. ин-та физ.-мат. АН АзССР. Сер. мат.—Баку: АН АзССР, 1959.—С. 23–27.
8. Аксентьева Е. П., Гарифьянов Ф. Н. К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана // Изв. вузов. Математика.—1983.—№ 4.—С. 43–51.
9. Гарифьянов Ф. Н., Насырова Е. В. О регуляризации линейных разностных уравнений с аналитическими коэффициентами и их приложения // Изв. вузов. Математика.—2011.—№ 11.—С. 78–83.
10. Гарифьянов Ф. Н. О регуляризации одного класса разностных уравнений // Сиб. мат. журн.—2001.—Т. 42, № 5.—С. 1012–1017.
11. Гарифьянов Ф. Н. О регуляризации некоторых разностных уравнений // Актуальные проблемы математического анализа.—Ростов н/Д.: Гинго, 2000.—С. 67–72.
12. Хавин В. П. Пространства аналитических функций // Итоги науки и техники. Мат. анализ.—М.: АН СССР, 1964.—С. 76–164.
13. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—С. 536.
14. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 1.—С. 73–126.
15. Гарифьянов Ф. Н. Моменты Стильтеса целых функций экспоненциального типа // Мат. заметки.—2000.—Т. 67, № 5.—С. 674–679.

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ БОЛЬШИХ ЛЕНТОЧНЫХ ТЁПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С. А. Золотых (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ),

В. А. Стукопин (Россия, Ростов-на-Дону, ДГТУ; Владикавказ, ЮМИ)

Тёплицева матрица $T_n(a)$ (см. [1]), размера $n \times n$, порожденная функцией (символом) f из класса L^1 комплекснозначных функций, определенных на комплексной единичной окружности $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, где \mathbb{C} — множество комплексных чисел, определяется формулой

$$T_n(f) = (f_{j-k})_{j,k=1}^n,$$

где f_ℓ — это ℓ -й коэффициент ряда Фурье функции f , определяемый формулой

$$f_\ell = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{ix}) e^{-i\ell x} dx \quad (\ell \in \mathbb{Z}).$$

Мы решаем задачу построения асимптотических формул (произвольного порядка) для собственных значений тёплицевых матриц $T_n(b)$, где b является степенью полинома Лорана $a(z) = z^{-1}(z - \alpha)(z - \beta)$. Мы рассматриваем асимптотику собственных чисел $\lambda_{j,n}$ если $n \rightarrow \infty$ равномерно, $1 \leq j \leq n$. Получены асимптотические формулы для собственных значений тёплицевых матриц с упомянутым выше символом.

Напомним (см. [2]), что множество предельных точек последовательностей $\{\lambda_k\}$, где $\lambda_k \in \sigma_{i_k}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} i_k = \infty$, называется предельным спектром последовательности тёплицевых матриц $\{T_n(f)\}_{n=1}^\infty$, и мы будем обозначать его через $\sigma_l(f)$.

Рассмотрим кривую $\mathcal{R}(b) := \sigma_l(b)$. Эта кривая имеет сложную структуру и делит комплексную плоскость на число связных компонент, которое является линейной функцией от степени k символа. Мы используем результаты статьи [3], в которой явно описана эта кривая в терминах символов $b(z)$. Тогда, как хорошо известно (см. [2]), $\mathcal{R}(a)$ является предельным множеством для множества собственных значений $\{\lambda_{j,n}\}_{j=1}^n$ операторов $T_n(b)$, $1 \leq n < \infty$. Отсюда следует, что для всех достаточно больших n , собственные значения $\lambda_{j,n}$ расположены в малой окрестности $\mathcal{R}(b)$.

Мы явно указываем на небольшую окрестность точки предельного спектра, где данное собственное значение находится для больших n ; также мы приводим итерационный алгоритм и асимптотическую формулу для быстрого вычисления собственных значений и анализируем их местоположение в \mathbb{C} по отношению к кривой $\mathcal{R}(b)$. Отметим, что мы рассматриваем случай, когда предельный спектр является сложной кривой с внутренностью. Случай, когда предельный спектр является простой дугой без внутренности рассмотрен в работах [4, 5],

причем в работе [4] получены асимптотические формулы для собственных чисел, а в [5] — для собственных векторов. Случай самосопряженных трёхдиагональных матриц рассмотрен в работе [6]. Следует отметить, что во всех этих работах используются, по существу, близкие методы для доказательства асимптотических формул, основанные на принципе сжатых отображений. Методы описания предельных спектров ленточных трёхдиагональных матриц развиты в работах [7, 8].

Литература

1. *Bottcher A. C., Grudsky S. M.* Spectral Properties of Banded Toeplitz Matrices.— Philadelphia: SIAM, 2005.—422 p.
2. *Schmidt P., Spitzer F.* The Toeplitz matrices of an arbitrary Laurent polynomial // *Math. Scand.*—1960.—Vol. 8.—P. 15–38.
3. *Золотых С. А., Стукопин В. А.* К вопросу о числе компонент связности дополнения предельного спектра ленточных трёхдиагональных матриц // *Владикавказ. мат. журн.*—2016.— Т. 18, № 2.—С. 41–48.
4. *Batalshchikov A., Grudsky S., Stukopin V.* Asymptotics of eigenvalues of large symmetric banded Toeplitz matrices // *Linear Algebra and its Applications.*—2015.—Vol. 469.— P. 464–486.
5. *Batalshchikov A., Grudsky S., Ramirez de Arellano E., Stukopin V.* Asymptotics of eigenvectors of large symmetric banded Toeplitz matrices // *Integral Equations and Operator Theory.*—2015.— Vol. 83—P. 301–330.
6. *Bottcher A., Grudsky S., Maksimenko E.* Inside the eigenvalues of certain Hermitian Toeplitz banded matrices // *J. Comput. Appl. Math.*—2016.—Vol. 233.—P. 2245–2264.
7. *Золотых С. А.* Об алгоритме построения трёхдиагональных матриц с заданным числом компонент связности дополнения предельного спектра // *Вестн. ДГТУ.*— 2015.— Т. 15, вып. 4 (83).—С. 116–122.
8. *Золотых С.А., Стукопин В.А.* Об описании предельного спектра ленточных трёхдиагональных матриц // *Вестн. ДГТУ.*—2012.—Т. 1.—С. 1–5.

МОДУЛЬНЫЕ ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ
И ОБОБЩЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТАЙНСПРИНГА

Калиниченко А. В.

(Россия, Владикавказ; ВЦ РАН)

Гильбертовы C^* -модули являются обобщением как гильбертовых пространств, так и C^* -алгебр. В последние годы в поле зрения исследователей оказались вполне положительные отображения, действующие в таких модулях. Известная теорема Стайнспринга о дилатации вполне положительных отображений в C^* -алгебрах некотором смысле имеет место и для гильбертовых C^* -модулей. Все необходимые сведения о C^* -алгебрах и гильбертовых C^* -модулях можно найти в [1, 2].

Рассмотрим гильбертов C^* -модуль V над C^* -алгеброй A . Через $\mathcal{P}_A(V)$ обозначим векторное пространство всех A -полуторалинейных форм $T : V \times V \rightarrow A$. Поясним более подробно. $T : V \times V \rightarrow A$ является A -полуторалинейной формой, если T — это \mathbb{C} -полуторалинейная форма и, кроме того, выполняются следующие условия:

$$T(u, va) = T(u, v)a \quad \text{для любых } u, v \in V, a \in A; \quad (1)$$

$$T(ua, v) = a^*T(u, v) \quad \text{для любых } u, v \in V, a \in A. \quad (2)$$

Будем полагать, что $T^*(u, v) = T(v, u)^*$. Полуторалинейная форма T называется *эрмитовой* или *самосопряженной*, если $T^* = T$. Эрмитова полуторалинейная форма T называется *положительной*, если для любого $u \in V$ выполняется неравенство $T(u, u) \geq 0$. Матрица эрмитовых полуторалинейных форм $(T_{ij}(\cdot, \cdot))$ называется *положительной*, если для любого набора v_1, \dots, v_n элементов модуля V матрица $(T_{ij}(v_i, v_j))$ является положительным элементом алгебры $M_n(A)$. Множество всех таких квадратных $n \times n$ матриц мы будем обозначать через $M_n(\mathcal{P}(V))$.

Сформулируем теперь результат.

Теорема. Пусть A — унитарная локальная C^* -алгебра, V — гильбертов C^* -модуль над C^* -алгеброй B , $\Phi : A \rightarrow \mathcal{P}(V)$ — вполне положительное отображение. Тогда существуют гильбертов C^* -модуль W над C^* -алгеброй B , сопрягаемый линейный оператор $D : V \rightarrow W$, \star -гомоморфизм $\varphi : A \rightarrow \mathcal{L}_B(W)$ из алгебры A в C^* -алгебру сопрягаемых операторов гильбертова C^* -модуля W такие, что для любых $x \in A$, $u, v \in V$ справедливо равенство $\Phi(x)(u, v) = \langle Du, \pi(x)Dv \rangle$.

Тройка (W, D, π) называется *представлением Стайнспринга* для вполне положительного отображения $\Phi : A \rightarrow \mathcal{P}(V)$. Частный случай основного результата, когда A является C^* -алгеброй, был доказан в работе [3].

Литература

1. Мануйлов В. М., Троицкий Е. В. C^* -гильбертовы модули.—М.: Факториал, 2001.
2. Мерфи Д. C^* -алгебры и теория операторов.—М.: Факториал, 1997.
3. Pedersen J.-P., Ylinen K. Modules, completely positive maps, and a generalized KSGNS construction // Positivity.—2011.—Vol. 15, № 3.—P. 509–525.

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

В. М. Каплицкий

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Пусть Ω — неограниченная область в пространстве \mathbb{R}^n , $k(x, y)$ — матрица-функция порядка m элементами которой являются измеримые функции, определенные на Ω . Пусть E — комплексное банахово пространство функций, определенных на Ω и

$$E^{(m)} = E \times E \times \dots \times E.$$

Рассмотрим интегральный оператор

$$(K\varphi)(x) = \int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad \varphi \in E^{(m)}.$$

Пусть этот оператор действует в пространстве $E^{(m)}$. Многие важные вопросы математической физики могут быть сведены к получению точных оценок скорости убывания на бесконечности собственных функций оператора K . В целом ряде задач ядро $k(x, y)$ интегрального оператора K допускает следующее представление:

$$k(x, y) = a(x)k_0(x, y)b(y),$$

где функция $k_0(x, y)$ либо зависит от разности аргументов, т. е. $k_0(x, y) = k(x - y)$, либо имеет разностную мажоранту, удовлетворяющую некоторым естественным условиям убывания на бесконечности. Для таких интегральных операторов существует связь между скоростью убывания функции k_0 и скоростью убывания любой собственной функции оператора K . Пусть S — четная субаддитивная функция:

$$S(-x) = S(x), \quad S(x + y) \leq S(x) + S(y).$$

Пусть при некотором положительном θ интегральный оператор

$$(M_{\theta}\varphi)(x) = \int_{\Omega} |k(x, y)| \exp(\theta S(x - y))\varphi(y) dy$$

ограничен в $E^{(m)}$. В этом случае (при выполнении некоторых простых дополнительных условий) можно доказать, что если λ не принадлежит существенному спектру оператора K (т. е. оператор $K - \lambda I$ — нетеров), то все решения $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ уравнения $K\varphi = \lambda\varphi$ допускают оценку

$$|\varphi_j(x)| \leq C_j \exp(-\delta S(x)).$$

Будет рассказано о выводе этого результата для скалярного уравнения ($m = 1$). В статистической механике возникает бесконечная система интегральных уравнений для корреляционных функций (система Кирквуда — Зальцбурга), которую можно трактовать как операторное уравнение в некотором банаховом пространстве бесконечнокомпонентных векторов-функций. За счет специальной структуры операторов, действующих в таких пространствах, этот случай во многом сводится к однокомпонентному и так же может быть разобран. Точное значение показателя δ представляет в статистической механике особый интерес, поскольку эта величина непосредственно связана с корреляционной длиной ξ , вводимой в теории фазовых переходов [1].

Литература

1. Бакстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике.—М.: Мир, 1985.
2. Боголюбов Н. Н., Петрина Д. Я., Хацет Б. И. Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля // Теорет. и мат. физика—1969.—Т. 1, № 2.—С. 251–274.
3. Каплицкий В. М. Метод оценки собственных функций некоторых классов интегральных операторов в неограниченных областях // Изв. РАН. Сер. мат.—2011.—Vol. 75, № 5.—С. 65–92.

ДВОЙСТВЕННОСТЬ КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ МЕТРИК¹

М. В. Куркина (Россия, Ханты-Мансийск; ЮГУ),

Е. Д. Родионов (Россия, Барнаул; АлтГУ),

В. В. Славский (Россия, Ханты-Мансийск; ЮГУ)

Рассматривается класс конформно-плоских метрик, определенных на единичной сфере $S^n \subset R^{n+1}$, вида $ds = |dx|/h^2(x)$, где $h(x)$ строго положительная дифференцируемая функция такая, что для любой тройки точек $x_1, x, x_2 \in S^n$ выполнено неравенство

$$h(x) \leq h(x_1) \frac{\|x_2 - x\|}{\|x_2 - x_1\|} + h(x_2) \frac{\|x - x_1\|}{\|x_2 - x_1\|},$$

где $\|x - y\|$ — хордовое расстояние между точками сферы, т. е. $h(x)$ конформно-выпуклая в смысле работы [1].

Теорема 1. Пусть функция $h^*(y)$ определена равенством

$$h^*(y) = \max_{x \in S^n} \frac{\|x - y\|}{\sqrt{2} h(x)},$$

тогда метрика $ds^* = |dy|/h^{*2}(x)$ будет двойственной (полярной в смысле работы [2]) к исходной метрике.

Теорема 2. Функция $h^*(y)$ — конформно-выпуклая и $h^{**} = h$, кроме того выполняется неравенство

$$\|x - y\| \leq \sqrt{2} h(x) h^*(y),$$

где $x, y \in S^n$ произвольные точки единичной сферы, $\|x - y\|$ — хордовое расстояние.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неравенство можно рассматривать как аналог неравенства Юнга — Фенхеля в выпуклом анализе [3].

Литература

1. Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В. Конформно-выпуклые функции и конформно-плоские метрики неотрицательной кривизны // Докл. АН.—2015.—Т. 462, № 2.—С. 141.
2. Родионов Е. Д., Славский В. В. Полярное преобразование конформно-плоских метрик // Мат. тр.—2017.—Т. 20, № 2.—С. 1–19.
3. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа.—М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.—440 с.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, код проекта 1148, и Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № № 15-41-00092-г-Urals, 15-41-00063-г-Urals, 15-01-06582-а, 16-01-00336-а.

ПРИБЛИЖЕНИЕ КУСОЧНО ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ СУММАМИ ФУРЬЕ
И СРЕДНИМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА¹

М. Г. Магомед-Касумов
(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Пусть $f(x)$ — некоторая суммируемая 2π -периодическая функция. Для каждой такой функции можно определить частичную сумму Фурье порядка n :

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (1)$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt.$$

Суммы Валле Пуссена представляют собой усеченные средние арифметические частичных сумм Фурье:

$$V_m^n(f, x) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} S_{n+k}(f, x), \quad n \geq 0, \quad m \geq 1. \quad (2)$$

В данной работе рассматривается вопрос о локальных аппроксимативных свойствах тригонометрических сумм Фурье и средних Валле Пуссена по ним для кусочно гладких функций. Пространство кусочно гладких функций определяется следующим образом. Через $W_p^r([a, b])$ обозначим пространство Соболева, состоящее из $r - 1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, а $f^{(r)}(x) \in L^p([a, b])$. Далее, пусть дано конечное разбиение отрезка $[0, 2\pi]$

$$\Omega = \{0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_s = 2\pi\}.$$

Символом ${}_{\Omega}W_p^{0,r}$ обозначим пространство 2π -периодических функций, которые на каждом отрезке $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ можно превратить в функции из $W_p^r([\theta_i, \theta_{i+1}])$ путем переопределения их значений на концах рассматриваемого отрезка. Локальные аппроксимативные свойства тригонометрических сумм Фурье и средних Валле Пуссена по ним для функций из пространства ${}_{\Omega}W_p^{0,r}$ исследованы в работах [1, 2]. В них было показано, что суммы Фурье и средние Валле Пуссена вдали от точек разбиения Ω приближают указанные функции со скоростью $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{nm}$ соответственно. Приведенные оценки являются неулучшаемыми по порядку, если

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00486 а.

рассматривать все пространство $\Omega W_p^{0,r}$, которое, отметим, содержит и разрывные функции. Например, функция $f(x) = \text{sign} \sin x \in \Omega W_p^{0,r}$ для $\Omega = \{0, \pi, 2\pi\}$ при любых $r, p \geq 0$. Тут возникает вполне естественный вопрос о том, нельзя ли улучшить упомянутые оценки, если сузить рассматриваемое пространство, ограничившись, к примеру, только непрерывными функциями из $\Omega W_p^{0,r}$. Ответ дан в приведенной ниже теореме, для формулировки которой нам понадобится следующее обозначение: через $\Omega W_p^{q,r}$ обозначим пространство, состоящее из 2π -периодических функций $f(x) \in W_p^q$, q -я производная которых $f^{(q)}(x)$ принадлежит $\Omega W_p^{0,r}$.

Теорема. Для функций $f(x) \in \Omega W_1^{q,3}$ справедлива следующая оценка остатка при приближении средними Валле Пуссена:

$$|f(x) - V_m^n(f, x)| \leq \frac{c(f, s, \varepsilon)}{(n+1)^{q+1}m}, \quad x \in \bigcup_{i=1}^s [\theta_{i-1} + \varepsilon, \theta_i - \varepsilon].$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $m = 1$ теорема дает оценку для частичных сумм Фурье.

Литература

1. Магомед-Касумов М. Г. Аппроксимативные свойства классических средних Валле Пуссена для кусочно гладких функций // Вестн. ДНЦ РАН.—2014.—Т. 54.—С. 5–12.
2. Магомед-Касумов М. Г. Аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена для кусочно гладких функций // Мат. заметки.—2016.—Т. 100, № 2.—С. 229–247.

ИНТЕРПОЛИРУЮЩАЯ ФУНКЦИЯ А. Ф. ЛЕОНТЬЕВА
И ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА
ОБОБЩЕННОГО СДВИГА ВЛЕВО

С. Н. Мелихов

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)

Пусть Q — выпуклое локально замкнутое подмножество \mathbb{C} (см. [1]), $0 \in Q$. Символ $H(Q)$ обозначает пространство ростков всех функций, аналитических на Q , с естественной проективной топологией. Преобразование Лапласа $\varphi \mapsto \varphi_t(e^{tz})$, $z \in \mathbb{C}$, устанавливает топологический изоморфизм между сильным сопряженным к $H(Q)$ и некоторым счетным индуктивным пределом E весовых пространств Фреше целых (в \mathbb{C}) функций. Для функции $g_0 \in E$, $g_0(0) = 1$, оператор обобщенного сдвига влево (оператор Поммье)

$$D_{0,g_0}(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t) - g_0(t)f(0)}{t}, & t \neq 0, \\ f'(0) - g_0'(0)f(0), & t = 0, \end{cases}$$

$f \in E$, линейно и непрерывно отображает E в E . В докладе идет речь о собственных замкнутых D_{0,g_0} -инвариантных подпространствах E для функции g_0 , имеющей не более конечного числа нулей. Положим $e_\lambda(z) := e^{\lambda z}$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$. Для $n \geq 0$ символ $\mathbb{C}[z]_n$ обозначает пространство всех многочленов над полем \mathbb{C} степени не выше n . Имеет место

Теорема. Пусть $g_0 = Pe_\lambda$, где $\lambda \in Q$, а P — многочлен такой, что $P(0) = 1$; $\mathcal{D}(P)$ — множество всех делителей q многочлена P , для которых $q(0) = 1$.

(i) qE является собственным замкнутым D_{0,g_0} -инвариантным подпространством E для любого многочлена $q \in \mathcal{D}(P)$ степени не меньше 1.

(ii) $qe_\lambda\mathbb{C}[z]_n$ является собственным замкнутым D_{0,g_0} -инвариантным подпространством E для любого многочлена $q \in \mathcal{D}(P)$ и любого $n \geq \max(0, \deg(P) - \deg(q) - 1)$.

(iii) Для любого собственного замкнутого D_{0,g_0} -инвариантного подпространства H пространства E существует многочлен $q \in \mathcal{D}(P)$ степени не меньше 1 такой, что $H = qE$, или найдутся многочлен $q \in \mathcal{D}(P)$ и $n \geq \max(0, \deg(P) - \deg(q) - 1)$, для которых $H = qe_\lambda\mathbb{C}[z]_n$.

При доказательстве этой теоремы применяется описание циклических векторов оператора D_{0,g_0} в E , полученное при существенном использовании интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева ω_f . Пусть K — выпуклый компакт в \mathbb{C} , $0 \in K$. Для целой функции f экспоненциального типа, сопряженная диаграмма которой содержится в K , согласно [4],

$$\omega_f(z, x) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \int_0^t x(t - \xi) e^{\xi z} d\xi, \quad x \in H(K).$$

Здесь C — выпуклый контур, содержащий K в своей внутренности и такой, что функция x аналитична на замыкании его внутренности; γ — функция, ассоциированная по Борелю с f . Важную роль играет теорема единственности, доказанная А. Ф. Леонтьевым (см. [4]): если f имеет бесконечно много нулей и функция $\frac{\omega_f(z,x)}{f(z)}$ является целой по z , то $x = 0$.

Приведенные результаты получены совместно с О. А. Ивановой и опубликованы в работах [2, 3].

Литература

1. Melikhov S. N., Momm S. Analytic solutions of convolution equations on convex sets with an obstacle in the boundary // Math. Scand.—2000.—Vol. 86.—P. 293–319.
2. Ivanova O. A., Melikhov S. N. On the completeness of orbits of a Pommiez operator in weighted (LF) -spaces of entire functions // Complex Analysis and Operator Theory.—2016.—P. 1–18.—DOI: 10.1007/s11785-016-0617-5.
3. Иванова О. А., Мелихов С. Н. Об инвариантных подпространствах оператора Поммье в пространствах целых функций экспоненциального типа // Комплексный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.—М.: ВИНТИ, 2017.—Т. 142.—С. 111–120.
4. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.

МАКСИМАЛЬНЫЕ КОММУТАТИВНЫЕ *-ПОДАЛГЕБРЫ
АЛГЕБР ЛОКАЛЬНО ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

М. А. Муратов (Россия, Симферополь; КрымФУ),
Ю. С. Пашкова (Россия, Симферополь; КрымФУ),
В. И. Чилин (Узбекистан, Ташкент; НУУз)

Пусть \mathcal{M} — произвольная алгебра фон Неймана линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H , $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ — топологическая *-алгебра локально измеримых операторов, присоединенных к \mathcal{M} , где $t(\mathcal{M})$ — топология сходимости локально по мере. Для каждого подмножества $\mathcal{N} \subset LS(\mathcal{M})$ обозначим через \mathcal{N}' коммутант подмножества \mathcal{N} в алгебре $LS(\mathcal{M})$. В общем случае существуют замкнутые в топологии $t(\mathcal{M})$ коммутативные *-подалгебры \mathcal{N} в $LS(\mathcal{M})$, самосопряженные части которых $\mathcal{N}_h = \{T \in \mathcal{N} : T^* = T\}$ не являются векторными решетками относительно частичного порядка, индуцированного из $LS(\mathcal{M})_h$.

Теорема 1. Если \mathcal{N} максимальная коммутативная *-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, то \mathcal{N}_h является условно полной векторной решеткой.

Теорема 2. Если \mathcal{M} — конечная алгебра фон Неймана и \mathcal{N} максимальная коммутативная *-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, то \mathcal{N}_h — расширенная векторная решетка.

Теорема 3. Если для любой максимальной коммутативной *-подалгебры \mathcal{N} в $LS(\mathcal{M})$ векторная решетка \mathcal{N}_h является расширенной, то \mathcal{M} — конечная алгебра фон Неймана.

Литература

1. Муратов М. А., Чилин В. И. Алгебры измеримых и локально измеримых операторов // Тр. ин-та математики НАН Укр.—2007.—Т. 69.—2007.—С. 390.
2. Муратов М. А., Чилин В. И. Топологические алгебры измеримых и локально измеримых операторов // Современ. математика. Фундам. направления.—М.: РУДН, 2016.—Т. 61.—С. 115–163.

НЕСТАНДАРТНАЯ ЧАСТИЧНАЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ В ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА

А. Э. Пасенчук

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть $\Gamma = \{\xi \in C : |\xi| = 1\}$, $\Gamma^2 = \Gamma \times \Gamma$. Обозначим через $L_2(\Gamma^2)$ и $W(\Gamma^2)$ стандартные гильбертовы пространства суммируемых с квадратом на торе Γ^2 функций и функций с абсолютно суммируемыми коэффициентами Фурье соответственно. Пусть $L_2^{++}(\Gamma^2)$ подпространство, состоящее из всех элементов $L_2(\Gamma^2)$, аналитически продолжимых в область $\{(\xi, \eta) \in C^2 : |\xi| < 1, |\eta| < 1\}$, а P^{++} — оператор проектирования на подпространство $L_2^{++}(\Gamma^2)$.

Рассматривается оператор Теплица $T_a : L_2^{++}(\Gamma^2) \rightarrow L_2^{++}(\Gamma^2)$, $(T_a \phi)(\xi, \eta) = P^{++} a(\xi, \eta) \phi(\xi, \eta)$, $(\xi, \eta) \in \Gamma^2$, где функция $a(\xi, \eta) \in W(\Gamma^2)$ называется символом оператора T_a . И. Б. Симоненко [1] получен следующий критерий нетеровости: оператор T_a нетеров тогда и только тогда, когда его символ удовлетворяет условиям

$$a(\xi, \eta) \neq 0, \quad (\xi, \eta) \in \Gamma^2; \quad \operatorname{ind}_\xi a(\xi, \eta) = \operatorname{ind}_\eta a(\xi, \eta) = 0.$$

Из выполнения условий теоремы И. Б. Симоненко вытекает факторизация символа $a(\xi, \eta) = a^{--}(\xi, \eta) a^{-+}(\xi, \eta) a^{+-}(\xi, \eta) a^{++}(\xi, \eta)$. А последнее равенство влечет за собой представление $T_a = T_{a^{--}} T_{a^{-+}} T_{a^{+-}} T_{a^{++}}$, называемое частичной мультипликативностью. Однако, несмотря на обратимость операторов $T_{a^{\pm\pm}}$, это представление практически ничего не дает для исследования оператора T_a в отличие от одномерного случая. Поэтому представляется актуальным получение других подобных представлений, позволяющих исследовать оператор T_a . В следующей теореме приводятся некоторые классы символов, для которых такие представления имеют место.

Теорема. Пусть функция $a(\xi, \eta) = a^{\bullet-}(\xi, \eta) \eta^n$ ($a(\xi, \eta) = a^{\bullet+}(\xi, \eta) \eta^{-n}$), где $a^{\bullet\pm}(\xi, \eta) \in W(\Gamma^2)$, аналитически продолжима в область $\{\eta \in C : |\eta| > 1\}$ ($\{\eta \in C : |\eta| < 1\}$) при любом фиксированном $\xi \in \Gamma$, порождает нетеров оператор Теплица в пространстве $L_2^{++}(\Gamma^2)$. Тогда имеет место представление

$$T_a = T_{\eta^{-n}} T_{a^{--}} T_{a^{-+}} T_{a^{+-}} T_{\eta^n} \quad (T_a = T_{\eta^{-n}} T_{a^{-+}} T_{a^{--}} T_{a^{+-}} T_{\eta^n}),$$

где $a^{\pm\mp}(\xi, \eta)$ — компоненты канонической факторизации функции $a(\xi, \eta)$ в алгебре $W(\Gamma^2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Свойство, описанное в теореме, будем называть нестандартной частичной мультипликативностью.

При помощи представления, полученного в теореме, уравнение $T_a \phi = f$, приводится к равносильной системе из n уравнений. Оператор, порождаемый этой системой, действует в пространстве $(L^+(\Gamma))^n$ и является суммой матричного теплицева и вполне непрерывного операторов. Это приводит к построению равносильного регуляризатора, выписываемого через компоненты канонической факторизации матричного символа. При $n = 1$ регуляризатор выписывается в явной форме.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СПЕЦИАЛЬНЫМИ
ВЕЙВЛЕТ-РЯДАМИ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА

М. С. Султанахмедов
(Россия, Махачкала; ДНЦ РАН)

Определим скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)w(x) dx, \quad \text{где } w(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Пусть $L_{2,w}([-1; 1])$ — евклидово пространство интегрируемых функций $f(x)$ таких, что $\langle f, f \rangle < \infty$.

Для любых $n = 1, 2, \dots$ масштабирующей функцией Чебышева второго рода назовем полином вида

$$\phi_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^n U_j(x)U_j(\xi_k^{(n+1)}) \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

и вейвлет-функцией Чебышева второго рода полином

$$\psi_{n,k}(x) = \sum_{j=n+1}^{2n} U_j(x)U_j(\xi_k^{(n)}) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

где $U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ — полином Чебышева второго рода, $\xi_k^{(n)} = \cos \frac{\pi(k+1)}{n+1}$ — его k -й ноль.

В работе [1] доказано, что $\{\phi_{n,k}(x)\}_{k=0}^n$ и $\{\psi_{n,k}(x)\}_{k=0}^{n-1}$ ортогональны в $L_{2,w}([-1; 1])$ при всех $n = 1, 2, \dots$, и построен ортонормированный базис $\{\hat{\phi}_{0,0}(x), \hat{\phi}_{0,1}(x), \hat{\psi}_{0,0}(x), \hat{\psi}_{1,0}(x), \dots, \hat{\psi}_{m,0}(x), \hat{\psi}_{m,1}(x), \dots\}$. Таким образом, для функции $f(x) \in L_{2,w}([-1; 1])$ существует разложение

$$f(x) = \hat{a}_0 \hat{\phi}_{0,0}(x) + \hat{a}_1 \hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \hat{b}_{j,k} \hat{\psi}_{j,k}(x). \quad (1)$$

В работе [2] показан недостаток в свойствах сходимости частичных сумм ряда (1) к исходной функции $f(x)$, связанный со свойствами самих полиномов Чебышева второго рода. Предложен модифицированный специальный вейвлет-ряд со свойством «прилипания»:

$$f(x) = c(f, x) + (1-x^2) \left[\tilde{a}_0 \hat{\phi}_{0,0}(x) + \tilde{a}_1 \hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \tilde{b}_{j,k} \hat{\psi}_{j,k}(x) \right], \quad (2)$$

где

$$c(f, x) = \frac{f(-1) + f(1)}{2} - \frac{f(-1) - f(1)}{2} x.$$

Исследованы аппроксимативные свойства частичных сумм такого специального вейвлет-ряда вида

$$\tilde{\mathcal{V}}_{2^m}(f, x) = c(f, x) + (1 - x^2) \left[\tilde{a}_0 \hat{\phi}_{0,0}(x) + \tilde{a}_1 \hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \tilde{b}_{j,k} \hat{\psi}_{j,k}(x) \right].$$

Доказано, что для любой точки $x \in (-1, 1)$ существует некоторая константа $c > 0$ такая, что справедлива оценка

$$|f(x) - \tilde{\mathcal{V}}_{2^m}(f, x)| \leq c E_{2^m+2}(f) \left(1 + \ln \left(1 + (2^m + 2) \sqrt{1 - x^2} \right) \right).$$

Тогда как на концах отрезка $[-1, 1]$ значения частичных сумм ряда (2) совпадают со значениями исходной функции в этих точках: $\tilde{\mathcal{V}}_{2^m}(f, \pm 1) = f(\pm 1)$. Здесь $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ полиномами степени n .

В настоящей работе продолжено изучение аппроксимативных свойств ряда (2), предпринята попытка исследования частичных сумм более общего вида

$$\tilde{\mathcal{V}}_{2^m}^n(f, x) = c(f, x) + (1 - x^2) \left[\tilde{a}_0 \hat{\phi}_{0,0}(x) + \tilde{a}_1 \hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^n \tilde{b}_{j,k} \hat{\psi}_{j,k}(x) \right].$$

Литература

1. Султанакмедов М. С. Аппроксимативные свойства вейвлет-рядов Чебышева второго рода // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 3.—С. 56–64.
2. Султанакмедов М. С. Специальные вейвлеты на основе полиномов Чебышева второго рода // Изв. Сарат. ун-та. Нов. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2016.—Т. 16, № 1.—С. 34–41.

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ТРЕХЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ
В ПРИМЕСНОЙ МОДЕЛИ ХАББАРДА

С. М. Ташпулатов

(Узбекистан, Ташкент; НУУЗ)

Рассматривается оператор энергии трехэлектронных систем в примесной модели Хаббарда и описывается структура существенного спектра и дискретный спектр системы. Гамильтониан рассматриваемый систем имеет вид

$$\begin{aligned} H = & A \sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + \\ & + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow} + (A_0 - A) \sum_{\gamma} a_{0,\gamma}^+ a_{0,\gamma} + \\ & + (B_0 - B) \sum_{\tau,\gamma} (a_{0,\gamma}^+ a_{\tau,\gamma} + a_{\tau,\gamma}^+ a_{0,\gamma}) + (U_0 - U) a_{0,\uparrow}^+ a_{0,\uparrow} a_{0,\downarrow}^+ a_{0,\downarrow}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь A (A_0) — энергии электрона в регулярном (примесном) узле решетки, B (B_0) — интеграл перехода между электронами (между электроном и примесью) в соседних узлах, и суммирование по τ ведется по ближайшим соседям, U (U_0) — параметр внутриузловое Кулоновского взаимодействия двух электронов в регулярных (примесных) узлах, γ — спиновый индекс, $\gamma = \uparrow$ или $\gamma = \downarrow$, $a_{m,\gamma}^+$ и $a_{m,\gamma}$ — соответственно, операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^\nu$. Положим $\varepsilon_1 = A_0 - A$, $\varepsilon_2 = B_0 - B$ и $\varepsilon_3 = U_0 - U$.

В трехэлектронных системах существует одно квартетное и два дублетных состояния [1]. Гамильтониан H действует в антисимметричном пространстве Фока \mathcal{H}_{as} . Пусть φ_0 вакуумный вектор в \mathcal{H}_{as} . Первому дублетному состоянию соответствуют базисные функции ${}^1d_{m,n,p}^{1/2} = a_{m\uparrow}^+ a_{n\downarrow}^+ a_{p\uparrow}^+ \varphi_0$. Подпространство $\tilde{\mathcal{H}}_1^d$, отвечающее первому дублетному состоянию, состоит из множеств всех векторов вида

$$\psi = \sum_{m,n,p \in Z^\nu} \tilde{f}(m,n,p) {}^1d_{m,n,p}^{1/2}, \quad \tilde{f} \in l_2^{as},$$

где l_2^{as} является подпространством антисимметрических функций из пространстве $l_2((Z^\nu)^3)$.

Теорема 1. Подпространство $\tilde{\mathcal{H}}_1^d$ является инвариантными относительно оператора H , и сужение H_1^d оператора H на $\tilde{\mathcal{H}}_1^d$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор \bar{H}_1^d , действующий в пространстве l_2^{as} .

Обозначим через \mathcal{F} преобразование Фурье

$$\mathcal{F} : l_2((Z^\nu)^3) \rightarrow L_2((T^\nu)^3) \equiv \tilde{\mathcal{H}}_1^d,$$

где T^ν — ν -мерный тор. Положим $\tilde{H}_1^d = \mathcal{F}\tilde{H}_1^d\mathcal{F}^{-1}$. В квазиимпульсном представлении оператор \tilde{H}_1^d действует в пространстве $L_2^{as}((T^\nu)^3)$ по формуле

$$\begin{aligned}
(\tilde{H}_1^d \tilde{f})(x, y, z) &= 3A\tilde{f}(x, y, z) + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos x_i + \cos y_i + \cos z_i] \tilde{f}(x, y, z) + \\
&+ U \int_{T^\nu} [\tilde{f}(s, x + y - s, z) + \tilde{f}(x, s, y + z - s)] ds + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} [\tilde{f}(s, y, z) + \\
&+ \tilde{f}(x, s, z) + \tilde{f}(x, y, s)] ds + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \left\{ [\cos s_i + \cos x_i] \tilde{f}(s, y, z) ds + \right. \\
&+ [\cos s_i + \cos y_i] \tilde{f}(x, s, z) ds + [\cos s_i + \cos z_i] \tilde{f}(x, y, s) ds \left. \right\} + \\
&+ \varepsilon_3 \left[\int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, t, z) ds dt + \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(x, t, \xi) dt d\xi \right], \tag{2}
\end{aligned}$$

где L_2^{as} — подпространство антисимметрических функций из $L_2((T^\nu)^3)$.

Оператор \tilde{H}_1^d представляется в виде $\tilde{H}_1^d = \tilde{H}_2^s \otimes I_1 + I_2 \otimes \tilde{H}_1$, где

$$(\tilde{H}_1 f)(x) = \left\{ A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} \cos x_i \right\} \tilde{f}(x) + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} \tilde{f}(s) ds + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} [\cos s_i + \cos x_i] \tilde{f}(s) ds,$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{H}_2^s f)(x, y) &= \left\{ 2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos x_i + \cos y_i] \right\} f(x, y) + U \int_{T^\nu} f(s, x + y - s) ds + \\
&+ \varepsilon_1 \int_{T^\nu} \tilde{f}(x, t) dt + U \int_{T^\nu} f(s, y + z - s) ds + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, y) ds + \\
&+ 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} [\cos x_i + \cos s_i] \tilde{f}(s, y) ds + \varepsilon_3 \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, t) ds dt + \\
&+ 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} [\cos y_i + \cos t_i] \tilde{f}(x, t) dt + \varepsilon_3 \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(t, \xi) dt d\xi,
\end{aligned}$$

I_1 и I_2 — соответствующие единичные операторы.

Непрерывный спектр оператора \tilde{H}_1 состоит из отрезка $\sigma_{\text{cont}}(\tilde{H}_1) = [A - 2B\nu, A + 2B\nu]$. Оператор \tilde{H}_1 имеет не более двух собственных значений, удовлетворяющие условиям $z_1 < A - 2B$ и $z_2 > A + 2B$. А оператор \tilde{H}_2^s представляется в виде $\tilde{H}_2^s = \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1 + K$, где K является двумерным оператором. Существенный спектр оператора \tilde{H}_2^s состоит из объединений трех отрезков и он имеет не более пяти собственных значений. Следующие теорема описывает структуру существенного спектра и дискретного спектра оператора \tilde{H}_1^d . Пусть N — количество трехэлектронных примесных состояний системы, $P = -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, $M = -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, $R = -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, $Q = -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$.

Теорема 2. 1. Если $\nu = 1$, $0 < \varepsilon_1 \leq 2B$ и $M < \varepsilon_2 < Q$, тогда существенный спектр оператора \tilde{H}_1^d состоит из объединения не более восьми отрезков $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}^q) = [2z_1 + A - 2B, 2z_1 + A + 2B] \cup [z_1 + 2A - 4B, z_1 + 2A + 4B] \cup [z_1 + z_2 + A - 2B, z_1 + z_2 + A + 2B] \cup [2z_2 + A - 2B, 2z_2 + A + 2B] \cup [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [z_2 + 2A - 4B, z_2 + 2A + 4B] \cup [z_3 + A - 2B, z_3 + A + 2B] \cup [z_4 + A - 2B, z_4 + A + 2B]$, и верны неравенства $4 \leq N \leq 8$. При этом $z_1 < A - 2B$ и $z_2 > A + 2B$ являются собственными значениями оператора \tilde{H}_1 , z_3 и z_4 являются собственными значениями оператора \tilde{H}_2^s (то же верно и в пп. 2–4).

2. Если $\nu = 1$, $0 < \varepsilon_1 \leq 2B$ и $R < \varepsilon_2 < M$, тогда существенный спектр оператора \tilde{H}_1^d состоит из объединения не более пяти отрезков $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}^q) = [2z_1 + A - 2B, 2z_1 + A + 2B] \cup [z_1 + 2A - 4B, z_1 + 2A + 4B] \cup [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [z_3 + 2A - 4B, z_3 + 2A + 4B] \cup [z_4 + 2A - 4B, z_4 + 2A + 4B]$, и верны неравенства $1 \leq N \leq 3$.

3. Если $\nu = 1$, $0 < \varepsilon_1 \leq 2B$ и $Q < \varepsilon_2 < P$, тогда существенный спектр оператора \tilde{H}_1^d состоит из объединения не более пяти отрезков $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}^q) = [2z_2 + A - 2B, 2z_2 + A + 2B] \cup [z_2 + 2A - 4B, z_2 + 2A + 4B] \cup [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [z_3 + 2A - 4B, z_3 + 2A + 4B] \cup [z_4 + 2A - 4B, z_4 + 2A + 4B]$, и верны неравенства $1 \leq N \leq 3$.

4. Если $\nu = 1$, $0 < \varepsilon_1 \leq 2B$ и $\varepsilon_2 < P$ или $\varepsilon_2 > P$, тогда существенный спектр оператора \tilde{H}_1^d состоит из объединения не более трех отрезков $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}^q) = [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [z_3 + 2A - 4B, z_3 + 2A + 4B] \cup [z_4 + 2A - 4B, z_4 + 2A + 4B]$, и верны неравенства $0 \leq N \leq 2$.

Литература

1. Ташпулатов С. М. О спектральных свойствах трехэлектронных систем в модели Хаббарда // Теорет. и мат. физика.—2014.—Т. 179 (3).—С. 387–405.

HARDY OPERATORS IN GRAND LEBESGUE SPACES

S. Umarhadzhiev

(Russia, Grozny; Chechen AS)

Grand Lebesgue spaces on sets of infinite measure are defined with using an additional characteristic $a(\cdot)$ called a grandizer. Conditions on the grandizer $a(x)$ for the Hardy operators to be bounded in the grand Lebesgue spaces $L_a^{(p)}(\mathbb{R}^n)$ are found, and the lower and upper estimates for a sharp constant in the one-dimensional and multidimensional Hardy inequalities are given in dependence on the grandizer. For some special choice of the grandizer it is proved that this sharp constant is equal to the sharp constant for the classical Lebesgue spaces.

ОДНОВРЕМЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ РАЗДЕЛЕННОЙ
РАЗНОСТИ НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
ПО ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ В СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ НОРМЕ

С. А. Унучек

(Россия, Москва; РАНХиГС)

Пусть $n \in \mathbf{N}$. Рассмотрим класс последовательностей $\mathcal{W}_{2,h}^n = \{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) : \|\Delta_h^n x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq 1\}$. Преобразованием Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ является функция $(Fx)(\omega) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\omega} \in L_2([-\pi/h, \pi/h])$, а оператора разделенной разности первого порядка — функция $(F\Delta_h^1 x)(\omega) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{x_{j+1} - x_j}{h} e^{-ijh\omega} = \frac{e^{ih\omega} - 1}{h} (Fx)(\omega)$, преобразованием Фурье оператора разделенной разности порядка m — функция $(F\Delta_h^m x)(\omega) = \frac{(e^{ih\omega} - 1)^m}{h^m} (Fx)(\omega)$.

Ставится задача одновременного оптимального восстановления операторов всех разностей $(\Delta_h^1 x, \Delta_h^2 x, \dots, \Delta_h^{n-1} x)$ последовательности $x \in \mathcal{W}_{2,h}^n$, при условии, что ее преобразование Фурье на отрезке $[-\sigma; \sigma]$, $0 \leq \sigma \leq \pi/h$, нам известно с точностью до δ : $\|Fx(\omega) - y(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma; \sigma])} \leq \delta$, $\delta > 0$.

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения $\varphi(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots, \varphi_{n-1}(y))$, $\varphi_k(y) : \mathbb{L}_2([-\sigma; \sigma]) \rightarrow l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $1 \leq k \leq n-1$.

Обозначим $\bar{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1})$.

Погрешностью метода φ называется величина

$$e(\mathcal{W}_{2,h}^n, F, \bar{\Delta}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in \mathcal{W}_{2,h}^n, y \in \mathbb{L}_2([-\sigma; \sigma]), \\ \|Fx(\omega) - y(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma; \sigma])} \leq \delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k x - \varphi_k(y)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2}.$$

Здесь $p = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$, $p_k \geq 0$, $1 \leq k \leq n-1$, — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению оператора какой-либо разности.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\mathcal{W}_{2,h}^n, F, \bar{\Delta}, \delta) = \inf_{\varphi: \mathbb{L}_2([-\sigma; \sigma]) \rightarrow (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n} e(\mathcal{W}_{2,h}^n, F, \bar{\Delta}, \delta, \varphi).$$

Метод $\hat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом.

Пусть x — корень уравнения

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k x^k = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{k-n}{n}} x^n,$$

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} \frac{2}{h} \arcsin \frac{h\sqrt{x}}{2}, & \sqrt{x} < \frac{2}{h}, \\ \frac{\pi}{h}, & \sqrt{x} \geq \frac{2}{h}, \end{cases} \quad t(\omega) = \frac{4 \sin^2 \frac{\omega h}{2}}{h^2}, \quad \omega_\sigma = t(\sigma).$$

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Тогда

$$E(\mathcal{W}_{2,h}^n, F, \overline{\Delta}, \delta) = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{n-k}{n} + \omega_\sigma^{-n} \right) \right)^{1/2}, & \sigma < \widehat{\sigma}, \\ \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{\frac{n-k}{n}} \right)^{1/2}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Все методы

$$\widehat{\varphi}_k(y) = \begin{cases} \Delta_h^k F^{-1}(\alpha_k(\omega)y(\omega)), & \omega \in (-\sigma; \sigma), \\ 0, & \omega \notin (-\sigma; \sigma), \end{cases}$$

где

$$\alpha_k(\omega) = \begin{cases} \frac{\widehat{\lambda}_1 + \theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)}, & \omega \in (-\sigma; \sigma), \\ 0, & \omega \notin (-\sigma; \sigma), \end{cases}$$

а $\theta_k(\cdot)$ для почти всех $\omega \in (-\sigma; \sigma)$, удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) |\theta_k(\omega)|^2 \leq \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) \left(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) - \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) \right),$$

в котором

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{k}{n-k}} \left(1 - \frac{k}{n} \right), & \sigma < \widehat{\sigma}, \\ \sum_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{-\frac{k}{n}} \left(1 - \frac{k}{n} \right), & \sigma \geq \widehat{\sigma}, \end{cases}$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^{k-n}, & \sigma < \widehat{\sigma}, \\ \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}, \end{cases}$$

являются оптимальными.

Литература

1. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру // Мат. заметки.—2012.—Т. 92, № 1.—С. 59–67.
2. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление линейных операторов по неточной информации // Мат. форум. Т. 3. Исследования по мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВЦ РАН и РСО-А, 2009.—С. 158–192.—(Итоги науки. ЮФО).
3. Унучек С. А. Оптимальное восстановление разделенных разностей по неточно заданной последовательности // Диф. уравнения.—2015.—Т. 51, № 7.—С. 951–957.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ
В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Т. Н. Шах-Эмиров

(Россия, Махачкала; ДНЦ РАН)

Пусть $E = [-\pi, \pi]$, $p(x)$ — 2π -периодическая измеримая функция, $w(x)$ — неотрицательная почти всюду положительная 2π -периодическая суммируемая функция. Через $L_{2\pi, w}^{p(x)}$ обозначим множество измеримых 2π -периодических функций $f = f(x)$ таких, что

$$\int_E |f(x)|^{p(x)} w(x) dx < \infty.$$

При условии, когда $1 \leq \underline{p}(T) \leq \bar{p}(T) < \infty$ ($\underline{p}(B) = \operatorname{ess\,inf}_{x \in B} p(x)$, $\bar{p}(B) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in B} p(x)$), пространство $L_{2\pi, w}^{p(x)}$ нормируемо (см. [1]) и одна из эквивалентных норм вводится следующим образом:

$$\|f\|_{p(\cdot), w} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} w(x) dx \leq 1 \right\}.$$

Пусть $\lambda > 0$, $\Delta_\lambda = \left[-\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2\lambda} \right]$,

$$K_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda, & x \in \Delta_\lambda, \\ 0, & x \in [-\pi, \pi] \setminus \Delta_\lambda. \end{cases}$$

Продолжим $K_\lambda(x)$ 2π -периодически на $(-\infty, \infty)$. Операторы Стеклова S_λ определяются равенством

$$S_\lambda(f) = (S_\lambda(f))(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) K_\lambda(t) dt.$$

Через $S_{\lambda, \tau}(f)$ обозначим сдвиги операторов Стеклова

$$S_{\lambda, \tau}(f)(x) = S_\lambda(f)(x + \tau).$$

В настоящей работе получены условия на вес w , при которых равномерно ограничено семейство сдвигов операторов Стеклова $\{S_{\lambda, \tau}(f)\}_{1 \leq \lambda < \infty, |\tau| \leq \pi/\lambda^\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$.

Литература

1. Шарапуудинов И. И. О топологии пространства $L^{p(t)}([0, 1])$ // Мат. заметки.—1979.—Т. 26, № 4.—С. 613–632.

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРАХ
МЕЖДУ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

М. А. Шубарин

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Проблема описания интерполяционных свойств компактных операторов была сформулирована в [1, 2] следующим образом.

Вопрос C . Пусть даны интерполяционные пары банаховых пространств $\overline{X} = [X_0, X_1]$ и $\overline{Y} = [Y_0, Y_1]$. Предположим, что $T : X_0 + X_1 \rightarrow Y_0 + Y_1$ — произвольный линейный непрерывный оператор такой, что оператор $T : X_0 \rightarrow Y_0$ компактен и $T : X_1 \rightarrow Y_1$ непрерывен. Можно ли утверждать, что оператор $T : [X_0, X_1]_\tau \rightarrow [Y_0, Y_1]_\tau$ компактен?

Вопрос C_2 . Кроме предположений, сделанных в вопросе C , предполагается компактность оператора $T : X_1 \rightarrow Y_1$. Можно ли утверждать, что оператор $T : [X_0, X_1]_\tau \rightarrow [Y_0, Y_1]_\tau$ компактен?

В сформулированных выше вопросах предполагается, что $[X_0, X_1]_\tau$ пространство, построенное по паре $[X_0, X_1]$, методом комплексной интерполяции.

В докладе рассматривается возможность обобщения этих проблем на идеал ограниченных операторов в категории интерполяционных пар пространств Фреше с общим абсолютным базисом.

В [3] был построен интерполяционный функтор, определенный на этой категории, для которого ответ на вопрос C_2 будет отрицательным.

Литература

1. *Cwikel M., Kalton N. J.* Interpolation of Compact Operators by the Methods of Calderon and Gustavsson–Peetre / M. Cwikel, N. J. Kalton.—arXiv:math/9210206v1 [math.FA], 8 Oct 1992.
2. *Cwikel M., Janson S.* Complex interpolation of compact operators. An update // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.— 2006.—Vol. 55, № 3.—P. 164–169.
3. *Шубарин М. А.* Конструкция интерполяционного функтора в категории пар пространств Фреше с общим базисом // Владикавк. мат. журн.— 2014.—Т. 16, № 1.—С. 68–79.

ТЕОРЕМА ТИПА СТАЙНСПРИНГА
ДЛЯ УСЛОВНО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЯДЕР

Я. В. Эльсаев

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Вполне положительные отображения, действующие в операторных алгебрах являются, в настоящее время, полезным инструментом исследования в квантовой механике и теории квантовых вычислений. Пусть A и B — C^* -алгебры. Вполне положительное отображение $\varphi : A \rightarrow B$ — это линейное отображение такое, что $[\varphi(a_{ij})]_{i,j=1}^n$ — положительный элемент в C^* -алгебре $M_n(B)$ всех $n \times n$ квадратных матриц с элементами из B для всех положительных матриц $[(a_{ij})]_{i,j=1}^n$ в $M_n(A)$, $n \in \mathbb{N}$. Стайнспринг в середине прошлого столетия показал, что вполне положительное отображение $\varphi : A \rightarrow L(H)$ из алгебры A в алгебру $L(H)$ линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H , можно представить в форме $\varphi(\cdot) = S^*\pi(\cdot)S$, где π — это представление алгебры A в гильбертовом пространстве K и S — линейный ограниченный оператор из H в K . Все необходимые сведения о C^* -алгебрах и гильбертовых C^* -модулях можно найти в [1, 2].

Пусть X — некоторое множество и A — локальная C^* -алгебра. Ядром называется функция $K : X \times X \rightarrow A$. Для ядра $K : X \times X \rightarrow A$ через K^* обозначим функцию $K^*(s, t) = K(t, s)^*$. Ядро называется *самосопряженным*, если $K^* = K$. Самосопряженное ядро $K : X \times X \rightarrow A$ называется *условно положительно определенным*, если для любого конечного набора элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ алгебры A такого, что $\sum_i^n \alpha_i = 0$, выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_i^* K(x_i, x_j) \alpha_j \geq 0.$$

Сформулируем теперь результат.

Теорема. Пусть X — некоторое множество, A — локальная C^* -алгебра, $K : X \times X \rightarrow L(E)$ — условно положительно определенное ядро, действующее в локальную C^* -алгебру сопрягаемых операторов гильбертова A -модуля E . Тогда существует гильбертов A -модуль F и отображение $T : X \rightarrow L(E, F)$ такие, что

$$K(x, y) = 2T(x)^*T(y) - T(x)^*T(x) - T(y)^*T(y) - h(x) - h(y),$$

где $h : X \rightarrow L(E)$ — некоторое отображение.

Литература

1. Мануйлов В. М., Троицкий Е. В. C^* -гильбертовы модули.—М.: Факториал, 2001.
2. Мерфи Д. C^* -алгебры и теория операторов.—М.: Факториал, 1997.

Секция II

Дифференциальные и интегральные уравнения

КРИТЕРИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

С. Н. Асхабов

(Россия, Грозный; ЧГПУ, ЧГУ)

Пусть X есть вещественное банахово пространство, X^* — сопряженное с ним пространство и оператор Λ действует из X в X^* , т. е. $\Lambda \in (X \rightarrow X^*)$. Обозначим через $\langle y, x \rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. Оператор Λ с линейной областью определения $D(\Lambda) \subset X$ называется монотонным, если $\forall u, v \in D(\Lambda)$ выполняется неравенство $\langle \Lambda u - \Lambda v, u - v \rangle \geq 0$. Монотонный оператор $\Lambda \in (D(\Lambda) \rightarrow X^*)$ называется максимальным монотонным, если из выполнения неравенства $\langle f - \Lambda v, u - v \rangle \geq 0$ для любого $v \in D(\Lambda)$ следует, что $u \in D(\Lambda)$ и $\Lambda u = f$. Если Λ линейный оператор, то определение монотонного оператора совпадает с определением положительного оператора.

Как обычно, через \mathbb{N} и \mathbb{R} обозначаются множества всех натуральных и действительных чисел, соответственно.

В монографии [1] установлено, что для положительности интегрального оператора свертки в пространстве Лебега необходимо и достаточно, чтобы косинус-преобразование Фурье его ядра было неотрицательной функцией. В данной работе доказано, что для положительности интегро-дифференциального оператора свертки в пространстве Лебега необходимо и достаточно, чтобы синус-преобразование Фурье его ядра было неотрицательной функцией. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$ и ядро $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$. Для того чтобы интегро-дифференциальный оператор свертки

$$(Tu)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)u'(t) dt$$

был положительным в классе $M_p(-\pi, \pi) = \{u(x) : u(x) \in L_p(-\pi, \pi), u'(x) \in L_q(-\pi, \pi)\}$, $q = p/(p-1)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\widehat{h}_s(k) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin(kt) dt \geq 0 \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Доказательство теоремы 1 использует методы теории дискретного преобразования Фурье и основано на равенстве

$$\langle Tu, u \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)u'(t) dt \right) u(x) dx = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \widehat{h}_s(k) |u_k|^2,$$

где $u_k = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \exp(-ikx) dx$, справедливом для любой функции $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$.

Примером функции, удовлетворяющей условию (1) может служить убывающая функция. А именно, если в качестве основного интервала взять $(0, 2\pi)$, то легко показать [3], что $\hat{h}_s(k) = \int_0^{2\pi} h(t) \sin(kt) dt \geq 0$, если функция $h(x)$ убывает в интервале $(0, 2\pi)$.

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$ и ядро $h(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Для того чтобы интегро-дифференциальный оператор свертки

$$(\mathbb{T}u)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t)u'(t) dt$$

был положительным в классе $M_p(\mathbb{R}) = \{u(x) : u(x) \in L_p(\mathbb{R}), u'(x) \in L_q(\mathbb{R})\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\hat{h}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \sin(xt) dt \geq 0 \quad \text{при всех } x \in [0, \infty). \quad (2)$$

Доказательство теоремы 2 использует методы теории интегрального преобразования Фурье и основано на равенстве

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t)u'(t) dt \right) u(x) dx = 2\sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{h}_s(x)x |\hat{u}(x)|^2 dx, \quad (3)$$

где $\hat{u}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-ixt) dt$, справедливом для любой финитной на оси \mathbb{R} бесконечно-дифференцируемой функции $u(x)$.

В связи с равенством (3) заметим, что если $u(x) \in M_p(\mathbb{R})$, то $u(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Примером ядра $h(x)$, удовлетворяющего условию (2), может служить функция $h(x) = x/(x^2 + 1)^2$, для которой $\hat{h}_s(x) = \sqrt{\pi/8} x \exp(-x)$.

Используя теоремы 1 и 2, методом максимальных монотонных операторов [2] доказываются теоремы существования и единственности решения для различных классов нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки в классах $M_p(-\pi, \pi)$ и $M_p(\mathbb{R})$, соответственно. При $p = q = 2$ эти теоремы охватывают и случай линейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки. Приводятся также примеры интегро-дифференциальных уравнений типа свертки с нечетностепенными нелинейностями, иллюстрирующие полученные результаты.

Литература

1. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки.—М.: Физматлит, 2009.—304 с.
2. Гаевский Х., Грегер К., Захарнас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.—М.: Мир, 1978.—336 с.
3. Харди Г. Х., Рогозинский В. В. Ряды Фурье.—М.: Физматгиз, 1959.—156 с.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А. К. Баззаев

(Россия, Владикавказ; СОГУ, ВИУ)

В прямоугольнике $Q_T = \{0 \leq x \leq \ell, 0 < t \leq T\}$ рассматривается третья начально-краевая задача:

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x, t)u + f(x, t), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (1)$$

$$\begin{cases} k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda_-(x, t)u - \mu_-(x, t), & x = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ -k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda_+(x, t)u - \mu_+(x, t), & x = \ell, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} 0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2, \quad 0 < q(x, t) \leq c_3, \\ r(0, t) \geq 0, \quad r(\ell, t) \leq 0, \quad |r(x, t)| \leq c_4, \quad \lambda_\pm \geq \lambda^* > 0, \end{aligned}$$

$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{u}(x, \eta)}{(t-\eta)^\alpha} d\eta$ — регуляризованная дробная производная Римана — Лиувилля (дробная производная Капуто) порядка α , $0 < \alpha < 1$, $\dot{u} = \partial u / \partial t$, c_0, c_1 — положительные постоянные, Q_T .

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1)–(3) обладают таким количеством непрерывных производных, которое необходимо для обеспечения нужной гладкости решения $u(x, t)$ в прямоугольнике Q_T .

В работе [1] было показано, что если функция $v(t) \in C^2[0, t]$, то имеет место равенство $\partial_{0t_j+1}^\alpha v = \Delta_{0t_j+1}^\alpha v + O(\tau)$, где $\Delta_{0t_j+1}^\alpha v = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) v_t^s$ — дискретный аналог регуляризованной дробной производной Римана — Лиувилля, $v_t^s = (v^{s+1} - v^s) / \tau$. В работе [2] данный результат был улучшен при условии, что функция $v(t) \in C^3[0, t]$.

Лемма 1. Если $v(t) \in C^3[0, T]$, то $\partial_{0t_j+1}^\alpha v = \Delta_{0t_j+1}^\alpha v + O(\tau^{2-\alpha})$.

Разностный аналог задачи (1)–(3) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_{0t_j+1}^\alpha y &= \bar{\Lambda} y^{j+1} + \Phi^{j+1}, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\bar{\Lambda} y = \begin{cases} \tilde{\Lambda} y = \varkappa(ay_{\bar{x}})_x + b^+ a^{(+1)} y_x + b^- ay_{\bar{x}} - dy, & x \in \omega_h, \\ \Lambda^- y = \frac{\bar{a}^{(1)} y_{x,0} - \bar{\lambda}_- y_0}{0.5h}, & x = 0, \\ \Lambda^+ y = -\frac{\bar{a}^{(N)} y_{\bar{x},N} + \bar{\lambda}_+ y_N}{0.5h}, & x = \ell, \end{cases} \quad \Phi = \begin{cases} \varphi, & x \in \omega_h, \\ \frac{\bar{\mu}_-}{0.5h}, & x = 0, \\ \frac{\bar{\mu}_+}{0.5h}, & x = \ell, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{a}^{(1)} &= a^{(1)} + 0.5hr_0, & \bar{a}^{(N)} &= a^{(N)} - 0.5hr_N, \\ \bar{\lambda}_- &= \lambda_- + 0.5hd^{(0)}, & \bar{\lambda}_+ &= \lambda_+ + 0.5hd^{(N)}, \\ \bar{\mu}_- &= \mu_- + 0.5hf_0, & \bar{\mu}_+ &= \mu_+ + 0.5hf_N.\end{aligned}$$

При условии достаточной гладкости решения и входных данных задачи (1)–(3), согласно [3] и лемме 1, разностная схема 4 имеет порядок аппроксимации $O(h^{2-\beta} + \tau^{2-\alpha})$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Разностная схема (4) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (4) справедлива следующая априорная оценка в равномерной метрике:*

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^0\|_C + \frac{1}{\lambda^*} \max_{0 < t' \leq j\tau} (|\bar{\mu}_-(x, t')| + |\bar{\mu}_+(x, t')|) + \Gamma(2-\alpha) \sum_{j'=0}^j \tau^\alpha \|\varphi^{j'}\|_C, \quad (5)$$

из которой следует равномерная сходимость схемы (4) со скоростью $O(h^{2-\beta} + \tau^{2-\alpha})$.

Если в задаче (1)–(3) уравнение (1) заменить на

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \partial_{0x}^\beta u - q(x, t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (6)$$

где $\partial_{0x}^\beta u = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \frac{u'(\xi, t)}{(x-\xi)^\beta} d\xi$, $0 < \beta < 1$, — регуляризованная дробная производная Римана — Лиувилля порядка β , $0 < \beta < 1$, по пространственной переменной x , $u' = \partial u / \partial x$, c_0, c_1, c_2 — положительные постоянные, $r(x, t) \leq 0$, то для разностного решения данной задачи при малых h справедлива теорема 1.

Теорема 1 имеет место и для разностного решения уравнения (1) (уравнение теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью) с краевыми условиями вида

$$\begin{cases} k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = \varkappa_- \partial_{0t}^\nu u + \beta_-(x, t)u - \mu_-(x, t), & x = 0, \\ -k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = \varkappa_+ \partial_{0t}^\nu u + \beta_+(x, t)u - \mu_+(x, t), & x_\alpha = \ell, \end{cases} \quad (7)$$

$0 < \nu < 1, 0 < c_0 \leq k \leq c_1, \beta_\pm \geq \beta_* > 0, \varkappa_\pm = \text{const} > 0$.

Литература

1. Таукенова Ф. И., Шхануков-Лафишев М. Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2006.—Т. 46, № 10.—С. 1871–1881.
2. Алиханов А. А. Устойчивость и сходимость разностных схем для краевых задач уравнения диффузии дробного порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2016.—Т. 56, № 4.—С. 572–586.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М.: Наука, 1989.—616 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Г. С. Балашова

(Россия, Москва; МЭИ (НИУ))

Изучаются условия разрешимости задачи Дирихле для дифференциальных уравнений бесконечного порядка в ограниченной области $G \subset R^n$, $n \geq 1$, с границей Γ :

$$L(u) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{A}_\alpha(x, D^\gamma u) = h(x), \quad (1)$$

$$D^\omega u(x')|_{\Gamma} = 0, \quad x' \in \Gamma, \quad |\omega| = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где $\tilde{A}_\alpha(x, \varepsilon_\gamma)$ — непрерывные функции переменных $x \in G$ и всевозможных ε_γ , $|\gamma| \leq |\alpha|$, α, γ, ω — целочисленные мультииндексы.

Для нахождения обобщенного решения задачи (1), (2) ранее (см. [1]) рассматривалась последовательность задач порядка $2m$, левая и правая части которых представлялись частичными суммами рядов правой и левой частей исходного уравнения (1). Используя предельный переход при $m \rightarrow \infty$, устанавливалась разрешимость исходной задачи (1), (2) в пространстве Соболева бесконечного порядка

$$\mathring{W}^\infty\{\tilde{a}_\alpha, p\}_{(G)} \equiv \left\{ u(x) \in C_0^\infty(G) : \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \tilde{a}_\alpha \|D^\alpha u\|_p^p < \infty \right\}$$

с правой частью $h(x)$, принадлежащей сопряженному пространству

$$W^{-\infty}\{\tilde{a}_\alpha, p'\}_{(G)} \equiv \left\{ h(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^\alpha \tilde{a}_\alpha D^\alpha h_\alpha(x) : \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \tilde{a}_\alpha \|h_\alpha(x)\|_{p'}^{p'} < \infty \right\}.$$

Здесь $\tilde{a}_\alpha \geq 0$ для всех α , $p > 1$, $p' = p/(p-1)$ — числа, определяемые видом функций $\tilde{A}_\alpha(x, D^\gamma u)$, $h_\alpha(x) \in \mathcal{L}_{p'}(G)$, $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве Лебега.

В данной работе предложен новый подход для установления разрешимости задачи (1), (2), основанный на представлении оператора L в виде суммы двух операторов L_1 и L_2 :

$$\begin{aligned} L(u) &= L_1(u) + L_2(u) \equiv \\ &\equiv \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^\gamma u) + \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha(x, D^\gamma u) = h(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Каждый из этих операторов снова бесконечного порядка, но один из них главный, а другой — ему подчиненный. Следует отметить, что принцип сравнения операторов конечного порядка для них не применим. В основу сравнения

этих операторов положено соотношение пространств Соболева бесконечного порядка, являющихся энергетическими пространствами соответственно для операторов L_1 и L_2 . Теоремы вложения таких пространств, полученные автором в работах [2, 3], позволяют из дифференциального оператора бесконечного порядка выделить его главную часть. Однако, в каждом конкретном случае это требует глубокого анализа поведения функций $A_\alpha(x, D^\gamma u)$ и $B_\alpha(x, D^\gamma u)$. Такой подход позволил установить разрешимость более широкого круга задач, для которых выше упомянутым методом установить не представлялось возможным, что подтверждается приведенным примером.

При рассмотрении задачи Дирихле для линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка

$$\begin{aligned} L(u) &= L_1(u) + \lambda L_2(u) \equiv \\ &\equiv \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha(x) D^\gamma u) + \lambda \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_\alpha(x) D^\gamma u) = h(x) \end{aligned} \quad (4)$$

установлена фредгольмова разрешимость задачи (4), (2). Именно, если задача

$$\begin{aligned} L_1(v) + \lambda L_2(v) &= 0, \quad x \in G, \\ D^\omega v(x')|_\Gamma &= 0, \quad |\omega| = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

имеет только нулевое решение, то задача (4), (2) имеет единственное решение при любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, 2\}_{(G)}$.

Литература

1. Балашова Г. С., Дубинский Ю. А. Равномерная корректность семейства нелинейных краевых задач бесконечного порядка // Диф. уравнения.—1994.—Т. 30, № 4.—С. 610–620.
2. Балашова Г. С. Теоремы вложения для банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций нескольких переменных // Мат. заметки.—1990.—Т. 47, № 6.—С. 3–14.
3. Балашова Г. С. Об условиях продолжения следа и вложения для банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций // Мат. сб.—1993.—Т. 184, № 1.—С. 105–128.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ВАРИАНТА МОДЕЛИ FENE-P
ДВИЖЕНИЯ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ¹

Е. С. Барановский
(Россия, Воронеж; ВГУ)

Полимерные растворы при течении могут проявлять свойства, не характерные для ньютоновских жидкостей. Одна из математических моделей, учитывающих специфическую реологию таких сред, известна в литературе как модель FENE-P [1–3]. В основе этой модели лежит идеализированное представление макромолекулы полимера в виде гибкой гантели, состоящей из шариков, которые соединены между собой пружиной.

В настоящей заметке рассматривается начально-краевая задача для нелинейных уравнений, описывающих течение полимерной жидкости типа FENE-P в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с локально-липшицевой границей Γ при краевом условии проскальзывания Навье:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - (1 - \varepsilon) \Delta \mathbf{u} - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\operatorname{We}}{\varepsilon} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{A} - \left(1 - \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{A})}{b} \right) \mathbf{I} \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} = -\frac{\boldsymbol{\tau}}{\varepsilon} \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ [2(1 - \varepsilon) \mathbf{D}(\mathbf{u}) \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}]_{\tan} = -k \mathbf{u} \quad \text{на } \Gamma \times (0, T), \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma \times (0, T), \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0, \mathbf{A}(\cdot, 0) = \mathbf{A}_0 \quad \text{в } \Omega. \end{array} \right. \quad (1)$$

Система (1) записана в безразмерной форме; здесь \mathbf{u} — скорость течения, p — давление в жидкости, $\boldsymbol{\tau}$ — тензор избыточных напряжений, \mathbf{f} — массовые силы, \mathbf{A} — тензор конфигурации, $\operatorname{tr}(\mathbf{A})$ — след тензора \mathbf{A} , \mathbf{I} — единичный тензор, $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ — тензор скоростей деформаций, $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)/2$, \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к Γ , Re (число Рейнольдса), We (число Вайссенберга), T , b и k — положительные параметры, $0 < \varepsilon < 1$. Запись \mathbf{v}_{\tan} используется для обозначения касательной составляющей вектора \mathbf{v} .

Уравнение (1)₁ следует из второго закона Ньютона; (1)₂ — условие несжимаемости жидкости, (1)₅ — условие проскальзывания Навье, (1)₆ — условие непротекания на Γ . Соотношения (1)₃ и (1)₄ выводятся из уравнений состояния жидкости FENE-P (см., например, формулы (2.19) в [2]) с помощью несложных преобразований в предположении, что члены $\mathbf{A}(\nabla \mathbf{u})^T$, $(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{A}$ и $\operatorname{We} \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \boldsymbol{\tau} / (\varepsilon b)$ малы по сравнению с другими слагаемыми и могут быть отброшены.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-31-00182 мол_а.

Нас интересуют слабые решения задачи (1). Введем соответствующие функциональные пространства. Через $L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$ и $H^m(\Omega, \mathbb{R}^n) = \mathbf{W}^{m,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ обозначим пространства Лебега и Соболева вектор-функций, заданных на области Ω и принимающих значения в \mathbb{R}^n . Скалярное произведение в $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ будем обозначать через (\cdot, \cdot) . Пусть $\mathbf{U}(\Omega, \mathbb{R}^3) = \{\mathbf{v} \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v}|_\Gamma \cdot \mathbf{n} = 0\}$ и $\mathbf{X}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ — замыкание множества $\mathbf{U}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ в $\mathbf{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Через $\mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}$ обозначим пространство симметрических матриц размера 3×3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Слабым решением* задачи (1) назовем тройку

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}) \in L^2(0, T; \mathbf{X}(\Omega, \mathbb{R}^3)) \times L^\infty(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3})) \times L^\infty(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}))$$

такую, что выполнено равенство (1)₃ и

$$\begin{aligned} & -\operatorname{Re} \int_0^T (\mathbf{u}, \mathbf{w}') dt - \operatorname{Re} (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}(0)) - \operatorname{Re} \sum_{i=1}^3 \int_0^T \left(u_i \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} \right) dt + \int_0^T (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}(\mathbf{w})) dt + \\ & + 2(1 - \varepsilon) \int_0^T (\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{w})) dt + k \int_0^T \int_\Gamma \mathbf{u} \mathbf{w} d\Gamma dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{w}) dt, \\ & \int_0^T (\mathbf{A}, \mathbf{B}') dt + (\mathbf{A}_0, \mathbf{B}(0)) + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \left(\mathbf{A}, u_i \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} \right) dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}) dt \end{aligned}$$

для любых $\mathbf{w} \in C^1([0, T]; \mathbf{X}(\Omega, \mathbb{R}^3))$ и $\mathbf{B} \in C^1([0, T]; \mathbf{H}^2(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}))$ таких, что $\mathbf{w}(T) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{B}(T) = \mathbf{0}$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Пусть $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\mathbf{A}_0 \in L^2(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3})$, $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}^3))$. Тогда начально-краевая задача (1) имеет по крайней мере одно слабое решение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство этой теоремы проводится с применением метода Фаэдо — Галеркина со специальными базисами, построенными аналогично тому, как это сделано в [4] при решении краевой задачи для модели движения вязкоупругой жидкости Олдройда. Ключевую роль при доказательстве разрешимости задачи (1) играют энергетические оценки приближенных решений в различных функциональных пространствах и теоремы о компактности, позволяющие выделить из последовательности приближенных решений подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению задачи (1).

Литература

1. Bird R. B., Dotson P. J., Johnson N. L. Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain model // J. Non-Newtonian Fluid Mech.—1980.—Vol. 7.—P. 213–235.
2. Masmoudi N. Global existence of weak solutions to macroscopic models of polymeric flows // J. de Math. Pur. et Appl.—2011.—Vol. 96.—P. 502–520.
3. Le Bris C., Lelièvre T. Micro-macro models for viscoelastic fluids: modelling, mathematics and numerics // Sci. China Math.—2012.—Vol. 55.—P. 353–384.
4. Барановский Е. С. О слабых решениях эволюционных уравнений движения вязкоупругой жидкости // Сиб. журн. индустр. мат.—2017.—Т. 20, №2.—С. 21–32.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛАБО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ
ОДНОРОДНОСТЬЮ. МЕТОД МОМЕНТОВ

З. Р. Бозоров (Узбекистан, Бухара; БухГУ),
Д. К. Дурдиев (Узбекистан, Бухара; БухГУ)

Рассмотрим при $t \in R$, $(x, z) \in R^2$ интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{zz} - q(z)u = \int_0^t K(x, \tau)(u_{xx} + u_{zz} + qu)(t - \tau, x, z) d\tau \quad (1)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad (2)$$

$$\left[u_z + \int_0^t K(x, \tau)u_z(t - \tau, x, z) d\tau \right] \Big|_{z=0} = \delta(x)\delta'(t), \quad (3)$$

где $R_+^2 = \{(x, z) \in R^2 \mid z > 0\}$, $\delta'(t)$ — производная дельта-функции Дирака.

Обратная задача: определить $K(x, t)$, $t > 0$, $x \in R$ по решению прямой задачи (1)–(3) известному для $z = 0$, т. е. задана функция

$$u(t, x, 0) = g(t, x), \quad t > 0, \quad x \in R. \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $K(x, t)$ из класса непрерывных функций $C([0, \infty) \times R)$ называется решением обратной задачи (1)–(4), если соответствующее ей решение $u(t, x, z)$ задачи (1)–(3) из класса обобщенных функций $D'(R \times R_+)$ удовлетворяет (4) для $g(t, x)$, принадлежащих классу обобщенных функций $D'(R \times R_+)$, $R_+ = \{x \in R \mid x > 0\}$.

Развивая методы решения обратных задач, использованные в [1], мы в настоящей статье исследуем задачу восстановления ядра уравнения (1). При этом предполагается, что ядро $K(x, t)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x :

$$K(t, x) = K_0(t) + \varepsilon x K_1(t) + \dots, \quad (5)$$

где ε — малый параметр. Основной результат данной работы состоит в том, что удалось построить метод нахождения $K_0(t)$ первого слагаемого в (5). Для этого используем метод моментов.

Решение прямой задачи (1)–(3) будем искать в виде ряда по степеням ε , т. е.

$$u(t, x, z) = u_0(t, x, z) + \varepsilon u_1(t, x, z) + \dots \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение (1) и приравнявая выражения при одинаковых степенях ε , получим в итоге рекуррентную систему прямых задач, из которых находятся u_0 , u_1 и т. д. Тогда, очевидно, согласно формуле (4) функция $g(x, t)$ будет иметь такую же структуру как и функция u :

$$g(t, x) = g_0(t, x) + \varepsilon g_1(t, x) + \dots$$

Используя разложения функции u по формуле (6), функции K по формуле (5) и поступая аналогичным образом, находим, что обратная задача (1)–(3) распадается на следующие задачи последовательного определения K_0, K_1, \dots :

$$u_{ntt} - u_{nxx} - u_{nzz} - q(z)u_n = \int_0^t \sum_{j=0}^n x^j K_j(\tau) (u_{(n-j)xx} + u_{(n-j)zz} + qu_n)(t - \tau, x, z) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, (x, z) \in \mathbb{R}_+^2, \quad (7)$$

$$u_n|_{t < 0} \equiv 0, \quad (8)$$

$$\left[u_{nz} + \int_0^t \sum_{j=0}^n x^j K_j(\tau) u_{(n-j)z}(t - \tau, x, z) d\tau \right] \Big|_{z=0} = \delta(x) \delta'(t), \quad (9)$$

$$u_n|_{z=0} = g_n(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Домножая уравнения (7) на x^m и интегрируя по x в пределах от минус до плюс бесконечности, получаем

$$v_{(n,m)tt} = v_{(n,m)zz} + m(m-1)v_{(n,m-2)} + q(z)v_{n,m} + \int_0^t \sum_{j=0}^n K_j(\tau) [v_{(n-j,m+j)zz} + (m+j)(m+j+1)v_{(n-j,m+j-2)} + qv_{n-j,m+j}] (t - \tau, x, z) d\tau. \quad (11)$$

В этом уравнении через $v_{n,m}$ обозначен m -й момент функции u_n :

$$v_{n,m}(z, t) := \int_{-\infty}^{\infty} u_n(x, z, t) x^m dx.$$

$$v_{nn}|_{z=0} = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x, t) x^n dx = a_n(t), \quad n = 0, 1,$$

где $a_n(t)$, $n = 0, 1$, — заданные достаточно гладкие функции. Положим $n = 0$, $m = 0$. Тогда имеем

$$v_{00tt} - v_{00zz} = \int_0^t K_0(\tau) v_{00zz}(t - \tau, x, z) d\tau, \quad (12)$$

$$v_{00}|_{t < 0} \equiv 0, \quad (13)$$

$$\left[v_{00z} + \int_0^t \sum_{j=0}^n K_0(\tau) v_{00z}(t - \tau, x, z) d\tau \right]_{z=0} = \delta'(t), \quad (14)$$

$$v_{00}|_{z=0} = a_0(t). \quad (15)$$

Теорема. Пусть $a_0(t) = -\delta(t) + a(t)\theta(t)$, $a(t) \in C^2[0, T]$; $q(z) \in C[0, T/2]$; $\theta(t) = 1$, если $t \geq 0$; $\theta(t) = 0$, если $t < 0$. Тогда для любого фиксированного $T > 0$ обратная задача (12)–(15) имеет единственное решение $K_0(t) \in C^2[0, T]$.

Литература

1. Благовещенский А. С., Федоренко Д. А. Уравнения акустики в слабо горизонтально-неоднородной среде // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—2008.—Т. 354.—С. 81–99.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. В. Бойков

(Россия, Пенза; ПензГУ)

В докладе дан обзор работ автора и его сотрудников и учеников по приближенным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений.

Рассматриваются следующие виды гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода — линейные:

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p} + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau) d\tau = f(t), \quad (1)$$

$$a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + b(t_1, t_2) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau_1, t_2) d\tau_1}{(\tau_1 - t_1)^p} + c(t_1, t_2) \int_{-1}^1 \frac{x(t_1, \tau_2) d\tau_2}{(\tau_2 - t_2)^p} +$$

$$+ d(t_1, t_2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p + (\tau_2 - t_2)^p} + Hx = f(t_1, t_2), \quad (2)$$

$$a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + b(t_1, t_2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^p} + Hx = f(t_1, t_2), \quad (3)$$

и нелинейные:

$$a(t, x(t)) + \int_{-1}^1 \frac{h(t, \tau, x(\tau)) d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t). \quad (4)$$

Здесь $p = 2, 3, \dots, H$ — компактный оператор в соответствующих пространствах непрерывных функций.

Для приближенного решения уравнений (1)–(4) на базе сплайнов нулевого и первого порядков построены сплайн-проекторные методы [1–2]. Получены критерии сходимости и оценки погрешности.

Наряду с уравнениями (1)–(4) исследовались [3–4] приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений

$$a(t, x(t)) + \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau, x(\tau)) d\tau}{(\tau - t)^p} = f(t), \quad p = 2, 3, \dots, \quad (5)$$

и гиперсингулярных интегро-дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=0}^m a_k(t)x^{(k)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^l \int_{\gamma} \frac{h_k(t, \tau)x^{(k)}(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p} = f(t), \quad p = 2, 3, \dots, \quad (6)$$

$$\sum_{k=0}^m a_k(t)x^{(k)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^l \int_{\gamma} \frac{h_k(t, \tau, x^{(k)}(\tau))}{(\tau - t)^p} d\tau = f(t), \quad p = 2, 3, \dots, \quad (7)$$

с граничными условиями

$$\int_{\gamma} x(t)t^{-k-1} dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, s-1, \quad s = \max(m, l), \quad (8)$$

на замкнутых контурах интегрирования. Здесь γ — единичная окружность с центром в начале координат.

Отметим также работы по приближенному решению гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах [5] и гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода [6].

Литература

1. *Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I.* An approximate solution of hypersingular integral equations // *Appl. Numer. Math.*—2010.—Vol. 6, № 60.—P. 607–628.
2. *Boykov I. V., Ventsel E. S., Roudnev V. A., Boykova A. I.* An approximate solution of nonlinear hypersingular integral equations // *Appl. Numer. Math.*—2014.—Vol. 86.—P. 1–21.
3. *Бойков И. В., Захарова Ю. Ф., Семов М. А., Есафьев А. А.* Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений методом коллокаций // *Изв. вузов. Поволж. регион. Физ.-мат. науки. Математика.*—2014.—№ 3.—С. 101–113.
4. *Бойков И. В., Захарова Ю. Ф.* Приближенное решение гиперсингулярных интегродифференциальных уравнений // *Изв. вузов. Поволж. регион. Физ.-мат. науки. Математика.*—2010.—№ 1.—С. 80–90.
5. *Бойков И. В., Бойкова А. И., Айкашев П. В.* Проекционные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах // *Изв. вузов. Поволж. регион. Физ.-мат. науки. Математика.*—2016.—№ 1.—С. 71–86.
6. *Бойков И. В., Бойкова А. И., Семов М. А.* Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода // *Изв. вузов. Поволж. регион. Физ.-мат. науки. Математика.*—2015.—№ 3.—С. 11–27.

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА СКРЫТЫХ АТТРАКТОРОВ МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. М. Буркин

(Россия, Тула; ТулГУ)

Одним из ключевых факторов в расчете колебаний нелинейных динамических систем является область притяжения (аттрактор). Аттракторы можно разделить на *самовозбуждающиеся* и *скрытые*. Самовозбуждающиеся аттракторы удается локализовать численно при помощи стандартной вычислительной процедуры, в которой после переходного процесса траектория, начинающаяся в точке неустойчивого многообразия в малой окрестности неустойчивого равновесия, достигает аттрактора и рассчитывает его. Область притяжения скрытого аттрактора не содержит окрестностей состояний равновесия, поэтому для его обнаружения численными методами требуется разработка специальных вычислительных процедур. Такая процедура поиска скрытых аттракторов динамических систем $\dot{x} = f(x)$ в \mathbb{R}^n была предложена в [1]. Эта процедура основана на использовании идеи гомотопии и состоит в следующем. Рассматривается однопараметрическое семейство систем

$$\dot{x} = \psi(x, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1], \quad (1)$$

такое, что $\psi(x, 1) = f(x)$, и при малых $\varepsilon > 0$ система (1) имеет легко обнаруживаемый самовозбуждающийся орбитально асимптотически устойчивый цикл. Численно отслеживается эволюция этого цикла при возрастании ε до 1. Возможна следующая альтернатива: либо при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ происходит бифуркация исчезновения аттрактора, либо при $\varepsilon = 1$ обнаруживается скрытый аттрактор исследуемой динамической системы. Ясно, что ключевым моментом в приведенном алгоритме является построение функции $\psi(x, \varepsilon)$, обладающей перечисленными выше свойствами. Метод построения функции $\psi(x, \varepsilon)$ для многомерных моделей систем управления

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = C^*x, \quad (2)$$

где A , B , C — вещественные постоянные матрицы порядков, соответственно $n \times n$, $n \times m$ и $n \times m$, $\xi_j = \varphi_j(\sigma_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\varphi_j(\sigma_j)$ — непрерывные, дифференцируемые при $\sigma_j = 0$ функции, $W(p) = C^*(A - pI_n)^{-1}B$ — передаточная матрица системы, описан в [2] и основывается на использовании следующей доказанной в [2] теоремы.

Теорема. Пусть нелинейности $\varphi_j(\sigma_j)$ в системе (2) удовлетворяют соотношениям

$$\mu_j^1 \leq \frac{\varphi_j(\sigma_{j2}) - \varphi_j(\sigma_{j1})}{\sigma_{j2} - \sigma_{j1}} \leq \mu_j^2$$

для всех $\sigma_j \in (-\infty, \infty)$, $\sigma_{j1} \neq \sigma_{j2}$, $\varphi_j(0) = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, и существует число $\lambda > 0$ такое, что выполнены следующие условия.

1) Матрица $A + B\varphi'(0)C^*$, где $\varphi'(0) = \text{diag}(\varphi'_1(0), \dots, \varphi'_m(0))$, имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda \leq \text{Re } p \leq 0$.

2) Матрица $A + BhC^*$, где $h = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_m)$, является гурвицевой, и $|\varphi(\sigma) - hC^*x| < \gamma < \infty$.

3) При всех $\omega \in [0, \infty)$ справедливо неравенство

$$\det \text{Re} [I_m + \mu^1 W(i\omega - \lambda)]^* [I_m + \mu^2 W(i\omega - \lambda)] \neq 0,$$

$$\mu^k = \text{diag}(\mu_1^k, \mu_2^k, \dots, \mu_m^k), \quad k = 1, 2.$$

Тогда система (2) имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $x = 0$.

С помощью изложенного метода найдены скрытые аттракторы классической и обобщенной систем Чуа, системы управления ракетой-носителем, построен контрпример к известной в теории управления гипотезе Калмана. Кроме того оказалось, что метод, развитый для поиска скрытых аттракторов в системах управления вида (2), в некоторых случаях может быть применен для поиска и локализации аттракторов систем более общего вида.

Литература

1. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Vagitsev V. I. Localization of hidden Chua's attractors // Phys. Lett. A.—2011.—Vol. 375, № 23.—P. 2230–2233.
2. Burkin I. M., Khien N. N. Analytical-numerical methods of finding hidden oscillations in multidimensional dynamical systems // Differential Equations.—2014.—Vol. 50, № 13.—P. 1695–1717.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАМЯТИ СРЕДЫ
В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА
С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Д. К. Дурдиев

(Узбекистан, Бухара; БухГУ)

Изучение обратных задач для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений является интенсивно развивающейся областью теории обратных задач. Первые работы в этом направлении появились в конце 80-х годов прошлого столетия. Они связаны с определением одномерного ядра, зависящего от временной переменной, входящего в интегральный член типа свертки в таких уравнениях. Рассматривались задачи с распределенными источниками [1, 2] и с источниками, сосредоточенными в окрестности некоторой фиксированной точки [3, 4]. Исследованные в [3, 4] обратные динамические задачи имеют большую прикладную значимость в виду того, что возникающие волны распространяются от источников типа импульсных направленных «ударов» или «взрывов». Обобщая результаты статьи [4], в данной работе изучается обратная задача определения ядра, когда оно входит в интеграл типа свертки в произведении с равномерно эллиптическим оператором второго порядка с постоянной главной частью и переменными коэффициентами при младших производных от решения прямой задачи.

Рассматривается гиперболическое интегро-дифференциальное уравнение второго порядка

$$u_{tt} - Lu = \int_0^t k(\tau)Lu(x, t - \tau) d\tau + \delta(x, t) \quad (1)$$

при условии

$$u|_{t < 0} = 0. \quad (2)$$

Здесь $t \in R^1$, $x \in R^3$, $\delta(x, t)$ — дельта функция Дирака, сосредоточенная в $x = 0$, $t = 0$, L — дифференциальный оператор, имеющий вид

$$Lu = \Delta u + \sum_{i=1}^3 b_i(x)u_{x_i} + c(x)u, \quad (3)$$

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right),$$

$b_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$), $c(x)$ — заданные гладкие функции своих аргументов. Обратная задача заключается в следующем: определить функцию $k(t)$, $t > 0$, по известному в точке $x = 0$ обобщенному решению задачи Коши (1), (2)

$$u(0, t) = f(t), \quad t > 0. \quad (4)$$

В работе найдены те условия на заданные функции, при выполнении которых решение обратной задачи (1)–(4) существует в локальном смысле.

Теорема. Пусть $G_T = \{x : |x| \leq T\}$, T — произвольное фиксированное положительное число и

$$b_i(x) \in C^2(G_T), \quad i = 1, 2, 3, \quad c(x) \in C(G_T), \quad f(t) \in C^1(0, T].$$

Тогда существует положительное число $T_0 \in (0, T]$ такое, что обратная задача (1)–(4) в классе функций $k(t) \in C^2(0, T_0]$ однозначно разрешима.

Литература

1. Lorenzi A., Sinestrari E. An inverse problem in the theory of materials with memory // Nonlinear Anal. TMA.—1988.—Vol. 12.—P. 1217–1335.
2. Lorenzi A., Sinestrari E. Stability results for a partial integrodifferential inverse problem // Pitman Res. Notes Math.—1989.—Vol. 190.—P. 271–294.
3. Дурдиев Д. К. Обратная задача для трехмерного волнового уравнения в среде с памятью // Мат. анализ и дискрет. математика.—Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1989.—С. 19–27.
4. Дурдиев Д. К. К вопросу о корректности одной обратной задачи для гиперболического интегро-дифференциального уравнения // Сиб. мат. журн.—1992.—Т. 33 (3).—С. 69–77.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛАБО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ
ОДНОРОДНОСТЬЮ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Д. К. Дурдиев (Узбекистан, Бухара; БухГУ),

Х. Х. Турдиев (Узбекистан, Бухара; БухГУ)

Рассмотрим при $t \in R$, $(x, z) \in R^2$ систему интегро-дифференциальных уравнений

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{zz} - q(z)u = \int_0^t K(x, t)(u_{xx} + u_{zz} + q(z)u)(t - \tau, x, z) d\tau \quad (1)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$u|_{t \leq 0} \equiv 0, \quad (2)$$

$$\left[u_z + \int_0^t K(x, t)(u_z)(t - \tau, x, z) d\tau \right] \Big|_{z=0} = \delta'(x)\delta'(t), \quad (3)$$

где $R_+^2 = \{(x, z) \in R^2 \mid z > 0\}$, $\delta'(t)$ — производная дельта-функции Дирака. Обратная задача: определить $K(x, t)$, $t > 0$, $x \in R$ по решению прямой задачи (1)–(3), известному для $z = 0$, т. е. задана функция

$$u(t, x, 0) = g(t, x), \quad t > 0, x \in R. \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $K(t, x)$ из класса непрерывных Функций $C([0, \infty) \times R)$ называется решением обратной задачи (1)–(4), если соответствующее ей решение $U(t, x, z)$ задачи (1)–(3) из класса обобщенных функций $D'(R \times R_+)$ удовлетворяет (4) для $g(t, x)$, принадлежащих классу обобщенных функций $D'(R \times R_+)$, $R_+ = \{x \in R \mid x > 0\}$.

Задачи (1)–(4) относятся к числу многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. С современным состоянием теории обратных задач для таких уравнений можно ознакомиться в известных работах [1–3] (см. также библиографию в этих монографиях). Многомерные обратные задачи для уравнения (1) с начальным и граничным условиями, подобными (2), (3) и дополнительной информацией (4) исследованы в [4, 5]. В этих работах на основе метода шкал банаховых пространств получена локальная однозначная разрешимость поставленных задач в классе функций, аналитических по переменной x и гладких по переменной t . Развивая методы решения обратных задач, использованные в [6], мы в настоящей статье исследуем задачу восстановления ядра уравнения (1). При этом предполагается, что ядро $K(t, x)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x :

$$K(x, t) = K_0(t) + \varepsilon x K_1(t) + \dots, \quad (5)$$

где ε — малый параметр.

Основной результат данной работы состоит в том, что удалось построить метод нахождения $K_0(t)$ первого слагаемого в (5). Для этого, как мы увидим далее, достаточно задать образ Фурье от функции $g(t, x)$ по x для одного фиксированного значения преобразования.

Решение прямой задачи (1)–(3) будем искать в виде ряда по степеням ε , т. е.

$$u(t, z, x) = u_0(t, z, x) + \varepsilon x u_1(t, z, x) + \dots \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение (1) и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε , получим в итоге рекуррентную систему прямых задач, из которых находятся u_0 , u_1 и т. д. Тогда, очевидно, согласно формуле (4) функция $g(x, t)$ будет иметь такую же структуру как и функция u :

$$g(t, x) = g_0(t, x) + \varepsilon g_1(t, x) + \dots$$

Используя разложения функции u по формуле (6), функции K по формуле (5) и поступая аналогично предыдущему, находим, что обратная задача нахождения K_0 сводится к следующей задаче:

$$u_{0tt} - u_{0xx} - u_{0zz} - q(z)u_0 = \int_0^t K_0(\tau)[u_{0xx} + u_{0zz} + q(z)u_0](t - \tau, x, z) d\tau, \quad (7)$$

$$t \in R, \quad (x, z) \in R_+^2,$$

$$u_0|_{t \leq 0} \equiv 0, \quad \left[u_{0z} + \int_0^t K_0(x, \tau) u_{0z}(t - \tau, x, z) d\tau \right] \Big|_{z=0} = \delta'(x) \delta'(t), \quad (8)$$

$$u_0|_{z=0} = g_0(x, t), \quad (x, t) \in R^2. \quad (9)$$

Перейдем от функций $u_0(t, z, x)$ к их экспоненциальным образам Фурье по переменной x :

$$\tilde{u}_0(t, \lambda, z) = \int_R u_0(t, x, z) e^{-i\lambda x} dx.$$

Тогда имеем

$$\tilde{u}_{0tt} - \tilde{u}_{0zz} + (\lambda^2 - q(z))\tilde{u}_0 = \int_0^t K_0(\tau)[-(\lambda^2 - q(z))\tilde{u}_0 + \tilde{u}_{0zz}](t - \tau, x, z) d\tau, \quad (10)$$

$$t \in R, \quad (\lambda, z) \in R_+^2,$$

$$\tilde{u}_0|_{t \leq 0} \equiv 0, \quad \left[\tilde{u}_{0z} + \int_0^t K_0(x, \tau) \tilde{u}_{0z}(t - \tau, \lambda, z) d\tau \right] \Big|_{z=0} = -\lambda i \delta'(t), \quad (11)$$

$$\tilde{u}_0|_{z=0} = \tilde{g}_0(t, \lambda), \quad (t, \lambda) \in R^2. \quad (12)$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть $\tilde{g}_0(t, \lambda) = i\lambda\delta(t) + r(t, \lambda)\theta(t)$, где λ — фиксированное действительное число; $r(t, \lambda) \in C^2[0, T]$, $T > 0$; $\theta(t) = 1$, если $T \geq 0$; $\theta(t) = 0$, если $T < 0$. Тогда для любого фиксированного $T > 0$ обратная задач (10)–(12) имеет единственное решение $K_0(t) \in C^2[0, T]$.

Литература

1. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики.—М.: Наука, 1984.
2. Романов В. Г. Устойчивость в обратных задачах—М.: Научный мир, 2005.
3. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи.—Новосибирск, 2009.
4. Дурдиев Д. К. Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 3.—С. 574–582.
5. Durdiev D. K. Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations // Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.—2007.—Vol. 3, № 4.—Р. 411–423.
6. Благовещенский А. С., Федоренко Д. А. Уравнения акустики в слабо горизонтально-неоднородной среде // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—2008.—Т. 354.—С. 81–99.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ
ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

С. В. Исраилов (Россия, Грозный; КНИИ РАН, ЧГПУ, ЧГУ),
А. А. Сагитов (Россия, Грозный; ЧГУ)

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad (1)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ — данные числа, $f(x)$ — известная функция, интегрируемая на $[a; b]$. Для однородного уравнения

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = 0, \quad a_n = 1, \quad (2)$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$k^n + a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} + \dots + a_1 k + a_0 = 0.$$

Допустим, что (2) имеет k_1, k_2, \dots, k_n различных корней. Тогда справедливы соотношения Виета — Жерарда [1, 2], связывающие корни с коэффициентами, и (1) можно последовательно интегрировать.

Литература

1. Viète F. Opera Mathematica.—Lugduni Bata Vorum, 1646.
2. Girard A. Invention Nouvelle en Algebre.—Amsterdam, 1629.
3. Исраилов С. В., Мурадова П. Р. Приближенное решение задачи Коши для ненормального дифференциального уравнения высшего порядка методом неопределенных параметров // Образование и наука в современных условиях. Сб. материалов VIII Междунар. науч.-практич. конф.—Чебоксары, 2016.—С. 15–17.

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ АСИМПТОТИКИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ С КРАТНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

М. Р. Ишмеев (Россия, Москва; Тинькофф),
В. Б. Левенштам (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ),
Л. К. Нгуен (Вьетнам, Ханой; ВГТУ)

В работах [1, 2] рассматривается нормальная система линейных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами, для которой предельная (усредненная в смысле [3]) стационарная задача имеет простое нулевое собственное значение. Установлены существование и единственность периодического решения данной системы и построена его полная асимптотика по степеням малой величины, обратной частоте осцилляций коэффициентов системы, в двух случаях: когда собственный вектор, отвечающий простому нулевому собственному значению предельной стационарной задачи, не имеет обобщенных (в смысле Вишика — Люстерника [4]) присоединенных векторов [1], и когда имеет обобщенный присоединенный вектор [2]. Исследованы также вопросы устойчивости и неустойчивости по Ляпунову этого решения и доказана сходимости в обычном смысле асимптотического ряда.

В работах [5–6] рассматривались линейные параболические задачи в случае простого вырождения стационарной предельной задачи при отсутствии и наличии обобщенных присоединенных векторов 1-го порядка. Доказаны результаты о существовании и единственности периодических по времени решений, а также при помощи метода пограничного слоя [7] построены их асимптотические разложения. Аналогичные результаты получены в [8, 9] для линейных систем уравнений в частных производных с оператором Стокса в главной части также в случае простого вырождения.

В первой части доклада рассматривается возмущенная нормальная система того же вида, что в [1, 2]. Однако предельная стационарная задача имеет нулевое собственное значение произвольной конечной кратности. Предполагается, что все собственные векторы предельной задачи, отвечающие нулевому собственному значению, не имеют обобщенных присоединенных (в смысле Вишика — Люстерника) векторов. Для указанной системы решены те же, что в [1, 2], вопросы.

Во второй части доклада исследуется линейная система уравнений в частных производных с оператором Стокса в главной части в случае кратного вырождения стационарной предельной задачи. Доказаны существование и единственность периодического по времени решения, а также при помощи метода погранслоя построена и обоснована его асимптотика в равномерных по области метриках.

В заключение отметим, что в работе Л. И. Сазонова [10] доказаны существование и единственность периодических решений, а также построены полные асимптотики последних для линейных дифференциальных уравнений с ограниченными быстро осциллирующими коэффициентами в банаховых пространствах в случае произвольного (в частности кратного) вырождения. В работе Л. И. Сазонова [11] аналогичные [10] результаты получены для уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в банаховых пространствах. Актуальный для приложений вопрос о погранслоях составляющих асимптотик, приближающих решение в равномерных метриках, в столь широкой постановке [11], естественно, не рассматривался.

Литература

1. До Н. Т., Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с большим параметром в критическом случае // Журн. вычисл. мат. и мат. физ.—2011.—Т. 51, № 6.—С. 1043–1055.
2. До Н. Т., Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с высокочастотными слагаемыми в критическом случае // Диф. уравнения.—2012.—Т. 48, № 8.—С. 1190–1192.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.—М.: Наука, 1974.
4. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.—1960.—Т. 15, № 3.—С. 3–80.
5. Гусаченко В. В., Ильичева Е. А., Левенштам В. Б. Линейная параболическая задача. Высокочастотная асимптотика в критическом случае // Журн. вычисл. мат. и мат. физ.—2013.—Т. 53, № 7.—С. 1067–1081.
6. Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование линейной параболической задачи с высокочастотными коэффициентами в критическом случае // Мат. заметки.—2014.—Т. 96, № 4.—С. 522–538.
7. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярные вырождения и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук.—1957.—Т. 12, № 5.—С. 3–122.
8. Levenshtam V. B., Ishmееv M. R. Asymptotic integration of linear system with high-frequency coefficients and Stokes operator in the main part // Asymptotic Anal.—2015.—Vol. 92, № 3–4.—P. 363–376.
9. Ishmееv M. R., Levenshtam V. B. High-Frequency Asymptotics of a Solution to a Linear System with the Stokes Operator in the Principal Part // Problemy Mat. Anal.—Vol. 80.—2015.—P. 3–10.
10. Сазонов Л. И. О существовании периодических решений у ОДУ в банаховом пространстве с высокочастотными слагаемыми // Мат. заметки.—2016.—Т. 100, № 6.—С. 310–319.
11. Сазонов Л. И. Высокочастотная асимптотика решений ОДУ в банаховом пространстве.—(Принята к печати).—URL: mi.mathnet.ru/izv8298.

О ВЫЧИСЛЕНИИ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ ЧЕРЕЗ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

Д. С. Климентов

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В работе [1] было показано, что для поверхностей ограниченного искривления имеет место формула

$$\int_L Mdu + Ndv = \iint_Q \Gamma_{22}^1 L + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1) M - \Gamma_{11}^2 N du dv,$$

где Q — односвязная область, ограниченная кривой L , гомеоморфной окружности, L , M , N — коэффициенты второй основной формы поверхности $II = b_{ij} dx^i dx^j$, Γ_{ij}^k — символы Христовфеля второго рода. Не ограничивая общности, можно считать, что метрика поверхности приведена к изотермическому виду $ds^2 = I = \lambda(dx^2 + dy^2)$.

Пусть на поверхности ограниченного искривления положительной кривизны F заданы два винеровских процесса X_t и Y_t с переходной плотностью $p_t(x, y)$ и переходной функцией $P(t, x, \Gamma)$ соответственно. В работе [2] был выведен стохастический аналог уравнений Гаусса — Петерсона — Кодацци через характеристики указанных винеровских процессов. Этот результат обобщается на поверхность F следующим образом.

Теорема 1. Для поверхности ограниченного искривления F положительной кривизны имеет место формула

$$\int_L Mdu + Ndv = \iint_Q \Gamma_{22}^1 L + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1) M - \Gamma_{11}^2 N du dv,$$

где $b_{ij} = \frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t} \int P(t, x, dy) \frac{y_i y_j}{1 + \delta_{ij}}$, $\lambda = \frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t}$, а символы Христовфеля вычисляются как в работе [2].

Теорема 2. Кривизна поверхности F может быть вычислена по формуле

$$K = -\frac{\partial_t p_t}{2\Delta p_t} \Delta \ln \frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t}.$$

Литература

1. Бакельман И. Я. Дифференциальная геометрия гладких нерегулярных поверхностей // Успехи мат. наук.—1956.—Т. 11, № 2 (68).—С. 67–124.
2. Климентов Д. С. Стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей положительной кривизны // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Сер. Естеств. науки.—2013.—№ 6.—С. 24–27.

ОБ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЯХ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Л. М. Кожевникова

(Россия, Стерлитамак; СФ БашГУ)

Для эллиптических уравнений со степенными нелинейностями с L_1 -правой частью в работе [1] было предложено понятие энтропийного решения задачи Дирихле и доказаны его существование и единственность. В настоящей работе доказано существование энтропийных решений задачи Дирихле для некоторого класса эллиптических уравнений с переменными нелинейностями

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u, \nabla u) = |u|^{p_0(x)-2}u + a(x, u), \quad u(x)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1)$$

в произвольных областях $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$.

Приведем условия на функции, входящие в уравнение (1). Пусть $\vec{p}(x) = (p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)) \in (C^+(\bar{\Omega}))^{n+1}$. Положим

$$p_+(x) = \max_{i=1, n} p_i(x), \quad \bar{p}(x) = n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i(x)} \right)^{-1}, \quad p_*(x) = \begin{cases} \frac{n\bar{p}(x)}{n - \bar{p}(x)}, & \bar{p}(x) > n, \\ +\infty, & \bar{p}(x) \leq n. \end{cases}$$

Будем считать, что

$$p_+(x) \leq p_0(x) < p_*(x), \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

Пусть $s \cdot t$ обозначает скалярное произведение $s = (s_1, \dots, s_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ и $a(x, s_0, s) = (a_1(x, s_0, s), \dots, a_n(x, s_0, s))$.

Предполагается, что функции $a_0(x, s_0)$, $a_i(x, s_0, s)$, $i = 1, \dots, n$, $x \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^n$, каратеодориевы; кроме того, функции $a_i(x, s_0, s)$, $i = 1, \dots, n$, по $s_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворяют локальному условию Гельдера; функция $a_0(x, s_0)$ неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$.

Пусть существуют неотрицательные функции $\Phi_i(x) \in L_{p'_i(\cdot)}(\Omega)$, $p'_i(x) = p_i(x)/(p_i(x) - 1)$, $i = 1, \dots, n$, положительная непрерывная функция $\hat{a}(k)$ и положительная константа \bar{a} такие, что справедливы неравенства

$$|a_i(x, s_0, s)| \leq \hat{a}(k) (P(s)^{1/p'_i(x)} + \Phi_i(x)), \quad P(s) = \sum_{i=1}^n |s_i|^{p_i(x)}, \quad i = 1, \dots, n; \quad (3)$$

$$(a(x, s_0, s) - a(x, s_0, t)) \cdot (s - t) > 0 \quad (4)$$

при п. в. $x \in \Omega$ и любых $s_0 \in [-k, k]$, $s, t \in \mathbb{R}^n$, $s \neq t$. Следующее неравенство

$$a(x, s_0, s) \cdot s \geq \bar{a} P(s) \quad (5)$$

предполагается выполненным при п. в. $x \in \Omega$ и всех $s_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^n$.

Положим $a(x, s_0) = a(x, 0) + b(x, s_0)$. Будем считать, что

$$a(x, 0) \in L_1(\Omega), \quad (6)$$

$$\sup_{|s_0| \leq k} |b(x, s_0)| = G_k(x) \in L_{1, \text{loc}}(\Omega). \quad (7)$$

Определим пространство Соболева с переменными показателями $\dot{W}_{\mathbf{P}(\cdot)}^1(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\dot{W}_{\mathbf{P}(\cdot)}^1(\Omega)} = \|v\|_{p_0(\cdot)} + \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot)}.$$

Здесь $\|\cdot\|_{p_i(\cdot)}$ — норма Люксембурга в пространствах Лебега с переменными показателями $L_{p_i(\cdot)}(\Omega)$, $i = 0, \dots, n$.

Положим $T_k(r) = r$ при $|r| \leq k$, $T_k(r) = k \operatorname{sign} r$ при $|r| > k$; $\langle u \rangle = \int_{\Omega} u \, dx$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Энтропийным решением задачи (1) называется измеримая функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $A(x) = a(x, u) \in L_1(\Omega)$; $T_k(u) \in \dot{W}_{\mathbf{P}(\cdot)}^1(\Omega)$ при всех $k > 0$; при всех $k > 0$, $\xi(x) \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\langle (a(x, u) + |u|^{p_0(x)-2}u) T_k(u - \xi) \rangle + \langle a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \xi) \rangle \leq 0.$$

Теорема. Пусть выполнены условия (2)–(7), тогда существует энтропийное решение задачи (1).

Существование энтропийных решений задачи (1) в ограниченных областях при фиксированном росте функций $a_i(x, s_0, \mathbf{s})$, $i = 1, \dots, n$, по переменной s_0 установлено в работе [2]. В работе [3] доказано существование энтропийных решений задачи Дирихле в произвольных областях для некоторого класса эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями.

Литература

1. Benilan Ph., Boccardo L., Galluet Th., Pierre M., Vazquez J. L. An L_1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci.—1995.—Vol. 22, № 2.—P. 241–273.
2. Benboubker M. B., Hjjaj H., Ouaro S. Entropy solutions to nonlinear elliptic anisotropic problem with variable exponent // J. Appl. Anal. Comput.—2014.—Vol. 4, №. 3.—P. 245–270.
3. Кожевникова Л. М. Существование энтропийных решений эллиптической задачи в анизотропных пространствах Соболева — Орлица // Диф. уравнения. Мат. физика. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.—2017.—Т. 139.—С. 15–38.

THE EXPLICIT REPRESENTATION OF THE KERNEL
FOR ONE TRANSMUTATION OPERATOR

V. V. Kravchenko (Mexico, Querétaro; CINVESTAV-IPN),

S. M. Torba (Mexico, Querétaro; CINVESTAV-IPN),

E. L. Shishkina (Russia, Voronezh; VSU)

We deal with the differential Bessel operator

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{l(l+1)}{x^2}. \quad (1)$$

It arises often in problems of mathematical physics. For example, every time when one needs to study the Laplace operator in spherical coordinates the Bessel operator (1) appears. Besides, the operator (1) is related to the free radial Schrödinger operator, included in Euler–Poisson–Darboux equation, in the equations describing the random walk of particles etc. The operator (1) is degenerate and corresponding differential equations degenerate themselves on a domain containing the origin. There are a lot of different methods for analytical solution of equations with the operator (1) but only for specific equations. We develop a general method for solving equations with operator (1) which, moreover, lends itself for numerical computation. It is a *transmutation operators* method introduced, in [1–2].

Consider the perturbed Bessel equation

$$-u''(x) + \left(\frac{l(l+1)}{x^2} + q(x) \right) u(x) = \lambda u(x), \quad l \geq -\frac{1}{2}, \quad x \in (0, b]. \quad (2)$$

In [1] and [2] it was shown that a Volterra integral operator T exists defined by the formula

$$T[\varphi](x) = \varphi(x) + \int_0^x K(x, t)\varphi(t) dt,$$

where φ is a continuous function, with a continuous kernel K such that a regular solution of (2) can be written as

$$u(x, \lambda) = T[d_l(x, \lambda)],$$

where $d_l(x, \lambda) := \sqrt{x}J_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x})$ is a regular solution of the equation

$$-y''(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} y(x) = \lambda y(x), \quad l \geq -\frac{1}{2}, \quad x \in (0, x].$$

For any integer $l \geq 0$, using the approach developed in [3] we obtain an explicit representation of the kernel K ,

$$K(x, s) = \frac{\sqrt{\pi} s^{l+1}}{x^{2l+3}\Gamma(l+\frac{3}{2})} \times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+l+1} \beta_{m+l+1}(x) \frac{\Gamma(m+2l+\frac{5}{2})}{\Gamma(m+l+\frac{3}{2})} P_m^{(l+\frac{1}{2}, l+1)} \left(1 - 2 \frac{s^2}{x^2} \right), \quad (3)$$

where $P_m^{(l+\frac{1}{2}, l+1)}$ stands for a Jacobi polynomial. The coefficients β_k in (3) are defined in [3]. Additionally, a representation of the kernel for non-integer l and some new properties of this kernel are obtained.

References

1. *Stashevskaya V. V.* The inverse problem of spectral analysis for differential operators with a singularity at the origin // Uchen. Zap. Kharkov.—Kharkov: Izd-vo Mat. Obsch., 1957.—P. 49–86.—(Russian).
2. *Volk V. Ya.* On inversion formulas for a differential equation with a singularity at $x = 0$ // Uspehi Mat. Nauk (N. S.).—1953.—Vol. 4, № 56.—P. 141–151.—(Russian).
3. *Kravchenko V. V., Torba S. M., Castillo-Perez R.* A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of perturbed Bessel equations // Appl. Anal.—2017.—<http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2017.1284313>.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ,
МОДЕЛИРУЮЩЕЙ СЕЛЕКТИВНЫЙ ВОДОЗАБОРНЫЙ ПРОЦЕСС
В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ВОДОЕМЕ

И. Д. Музаев

(Россия, Владикавказ; ГФИ ВНИЦ РАН, Финансовый университет),

Н. И. Музаев

(Россия, Владикавказ; ГФИ ВНИЦ РАН)

В прямоугольной системе координат $oxyz$ полагается, что часть пространства, ограниченная условиями $0 < x < L$, $0 < y < B$, $0 < z < H$, представляет стратифицированный водоем, схематизированный в виде прямоугольного параллелепипеда длиной L , шириной B и глубиной H (см. рис. 1). Изменение плотности воды по глубине аппроксимировано через экспоненциальную функцию следующего вида:

$$\rho(z) = \rho_2 e^{-sz}, \quad s = \frac{1}{H} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

где ρ_2 и ρ_1 — плотности воды на дне и на свободной поверхности водоема.

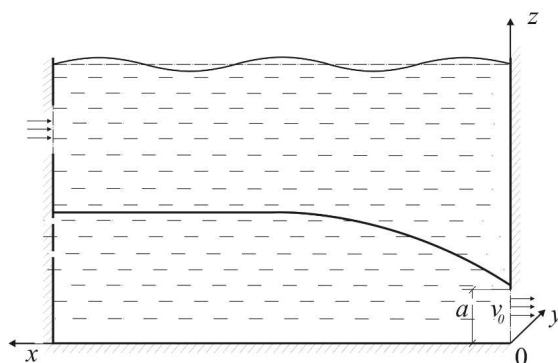


Рис. 1. Расчетная схема селективного водозаборного процесса в стратифицированном водоеме.

На участке грани водоема, ограниченной условиями $x = 0$, $y_0 - \frac{b}{2} \leq y \leq y_0 + \frac{b}{2}$, $0 \leq z \leq a$, устроено водозаборное окно, через которое забирается вода со средней скоростью $v_0(t)$ (a и b — высота и ширина окна соответственно, t — время).

В рамках линейной теории безвихревого движения идеальной несжимаемой жидкости с переменной по глубине плотностью и с учетом поверхностных гравитационных волн малой амплитуды движение воды в водоеме моделируется следующей начально-краевой задачей [1–5]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - s \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \text{при } t = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = -Y_0(y)Z_0(z)v(t), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=L} = -Y_1(y)Z_1(z)u(t), \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0,B} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=H} = 0, \quad (4)$$

$$Z_0(z) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq z \leq a, \\ 0, & \text{при } a \leq z \leq H, \end{cases} \quad (5)$$

$$Z_1(z) = \begin{cases} 1, & \text{при } H - a_1 < z < H, \\ 0, & \text{при } 0 \leq z \leq H - a_1, \end{cases}$$

$$Y_0(y) = \begin{cases} 1, & \text{при } y_0 - \frac{b}{2} \leq y \leq y_0 + \frac{b}{2}, \\ 0, & \text{при } 0 < y < y_0 - \frac{b}{2} \quad \text{или} \quad y_0 + \frac{b}{2} \leq y \leq B, \end{cases} \quad (6)$$

$$Y_1(y) = \begin{cases} 1, & \text{при } y_1 - \frac{b_1}{2} \leq y \leq y_1 + \frac{b_1}{2}, \\ 0, & \text{при } 0 < y < y_1 - \frac{b_1}{2} \quad \text{или} \quad y_1 + \frac{b_1}{2} < y < B, \end{cases} \quad (7)$$

где $\varphi(x, y, z, t)$ — потенциал скорости нестационарного движения воды в водоеме, g — ускорение силы тяжести.

Легко заметить, что граничные условия (3) поставлены и вспомогательные функции (5), (6) и (7) подобраны с тем условием, чтобы объемный расход забираемой воды равнялся объемному расходу поступающей в водоем воды. При таком условии глубина H в процессе движения воды будет постоянной. Величины a_1 и b_1 — это размеры участка грани $x = L$, через которую в водоем поступает вода с объемным расходом $q = v(t)ab$; (L, y_1, z_1) — координаты центра этого участка.

Поставленная начально-краевая задача решена аналитически. Получена совокупность формул, которые позволяют рассчитать габаритные размеры окна и скорость забора воды, обеспечивающих селективный водоотбор из глубинных слоев стратифицированного водоема.

Литература

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений.—М.: Наука, 1977.—815 с.
2. Аверкиев А. Г., Макаров И. И., Синотин В. И. Бесплотинные водозаборные сооружения. М.—Л.: Энергия, 1969.—164 с.
3. Справочник по гидравлике Под ред. В.А. Большакова.—Киев: Вища Школа, 1977.—С. 223–225.
4. Музаев И. Д., Харебов К. С., Музаев Н. И. Теоретические положения автоматизации проектирования селективных водозаборных устройств // Вычислит. технологии.—2016.—Т. 21, № 4.—С. 99–110.
5. Музаев И. Д., Харебов К. С., Музаев Н. И. Математическая модель, алгоритм и программа для проектирования селективных водозаборных систем // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Тех. науки.—2016.—№ 1.—С. 84–90.

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТНОГО ПОРЯДКА¹

Д. М. Поляков

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Работа посвящена исследованию асимптотики собственных значений для дифференциального оператора $L_{bc} : D(L_{bc}) \subset L_2[0, \omega] \rightarrow L_2[0, \omega]$, определяемого выражением

$$l(y) = (-1)^k y^{(2k)} - qy, \quad k > 1, \quad q \in L_2[0, \omega],$$

и одним из следующих типов краевых условий bc :

- (а) периодические $bc = \text{per}$: $y^{(j)}(0) = y^{(j)}(\omega)$, $j = 0, 1, \dots, 2k - 1$;
- (б) антипериодические $bc = \text{ар}$: $y^{(j)}(0) = -y^{(j)}(\omega)$, $j = 0, 1, \dots, 2k - 1$;
- (в) Дирихле $bc = \text{dir}$: $y(0) = \dots = y^{(2k-2)}(0) = 0$, $y(\omega) = \dots = y^{(2k-2)}(\omega) = 0$.

Таким образом, $D(L_{bc}) = \{y \in W_2^{2k}[0, \omega] : y \text{ удовлетворяет условию } bc\}$.

Отметим, что в настоящей работе не затрагивается случай $k = 1$, при котором оператор L_{bc} становится известным оператором Штурма — Лиувилля. Это связано с тем, что исследование спектральных свойств оператора Штурма — Лиувилля представляет самостоятельный интерес. Кроме того, в этом случае приходится развивать несколько более тонкую технику, чем в случае $k > 1$.

Интерес к изучению оператора L_{bc} связан с тем, что он описывает колебания балок, пластин и оболочек. Например, модель Власова изгибающих цилиндрических оболочек дает уравнение колебаний вида $y^{(8)} + qy = \lambda y$, где λ — спектральный параметр.

Для исследования оператора L_{bc} мы применим новую технику, которая развивает идеи из [1]. Указанная техника позволяет обобщить и усилить известные результаты в этом направлении [2, теорема 3.1].

Для единообразия мы введем параметр θ , который равен 0, если $bc = \text{per}$, и равен 1, если $bc = \text{ар}$. Через q и \tilde{q} с индексами внизу обозначаются коэффициенты Фурье потенциала q для $bc \in \{\text{per}, \text{ар}\}$ и $bc = \text{dir}$ соответственно.

Теорема 1. *Оператор L_{bc} , $bc \in \{\text{per}, \text{ар}\}$, является оператором с компактной резольвентой. Кроме того, существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что его спектр $\sigma(L_{bc})$ представим в виде*

$$\sigma(L_{bc}) = \sigma_{(m)} \cup \left(\bigcup_{n \geq m+1} \sigma_n \right), \quad (1)$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом точек, не превосходящим $2m + 1$, $\sigma_n = \{\tilde{\lambda}_n^-\} \cup \{\tilde{\lambda}_n^+\}$, $n \geq m + 1$. Собственные значения $\tilde{\lambda}_n^\mp$, $n \geq m + 1$, допускают

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-31-00027.

следующее асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_n^{\mp} &= \left(\frac{\pi(2n + \theta)}{\omega} \right)^{2k} - q_0 - \frac{2\omega^{2k}}{\pi^{2k}} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq n}}^{\infty} \frac{q_{n-j}q_{j-n}}{(2j + \theta)^{2k} - (2n + \theta)^{2k}} \mp \\ &\mp \left(q_{-2n-\theta} + \frac{\omega^{2k}}{\pi^{2k}} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}, j \neq n, \\ j \neq -n-\theta}} \frac{q_{-n-j-\theta}q_{j-n}}{(2j + \theta)^{2k} - (2n + \theta)^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(q_{2n+\theta} + \frac{\omega^{2k}}{\pi^{2k}} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}, j \neq n, \\ j \neq -n-\theta}} \frac{q_{n+j+\theta}q_{n-j}}{(2j + \theta)^{2k} - (2n + \theta)^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} + \xi_{bc}(n). \end{aligned}$$

Последовательность $\xi_{bc} : m + \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$ удовлетворяет оценке

$$|\xi_{bc}(n)| \leq \frac{C_{\theta}}{n^{4k-3}} \alpha_n,$$

где (α_n) — суммируемая с квадратом последовательность и $C_{\theta} > 0$ — некоторая постоянная.

Теорема 2. Оператор L_{dir} является оператором с компактной резольвентой. Существует такое число $m \in \mathbb{N}$, что его спектр представим в виде (1), где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом точек, не превосходящим m , $\sigma_n = \{\tilde{\lambda}_{n,\text{dir}}\}$, $n \geq m + 1$, — одноточечное множество. Для собственных значений $\tilde{\lambda}_{n,\text{dir}}$, $n \geq m + 1$, справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{n,\text{dir}} &= \left(\frac{\pi n}{\omega} \right)^{2k} - \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} q(t) dt + \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} q(t) \cos \frac{2\pi n}{\omega} t dt - \\ &- \frac{\omega^{2k}}{2\pi^{2k}} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq n}}^{\infty} \frac{(\tilde{q}_{|n-j|} - \tilde{q}_{n+j})^2}{j^{2k} - n^{2k}} + \eta_{\text{dir}}(n), \quad n \geq m + 1. \end{aligned}$$

Здесь последовательность $\eta_{\text{dir}} : \{n \in \mathbb{N} | n \geq m + 1\} \rightarrow (0, \infty)$ удовлетворяет оценке

$$|\eta_{\text{dir}}(n)| \leq \frac{M}{n^{4k-3}} \beta_n,$$

где (β_n) — суммируемая с квадратом последовательность и $M > 0$ — некоторая постоянная.

Теорема 3. Оператор $-L_{bc}$, $bc \in \{\text{per}, \text{ap}, \text{dir}\}$, является генератором аналитической полугруппы операторов.

Кроме того, в теореме 3 получен асимптотический вид указанной аналитической полугруппы операторов.

Литература

1. Баскаков А. Г., Поляков Д. М. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Мат. сб.—2017.—Т. 208, № 1.—С. 3–47.
2. Menken H. Accurate asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of a boundary-value problem of fourth order // Boundary Value Problems.—2010.—Vol. 2010.—P. 720235.

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПОЛНОТЫ РИМАНОВА
АНАЛИТИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

В. А. Попов

(Россия, Москва; Финансовый университет)

Рассмотрим риманово аналитическое многообразие M и шар $U \subset M$ малого радиуса с центром в некоторой точке $x_0 \in M$. Под аналитическим продолжением локально заданной метрики будем подразумевать любое риманово аналитическое многообразие N такое, что существует аналитическая изометрия $\varphi : U \rightarrow N$. Поставим задачу найти наиболее естественное аналитическое продолжение данной метрики. Естественным требованием является свойство непродолжаемости искомого многообразия, введенного еще в классической монографии Хелгасона. Однако непродолжаемые многообразия могут быть весьма неестественными. Например, односвязная накрывающая правой полуплоскости выколотыми точками $(\frac{1}{n}, \frac{k}{n})$, $k, n \in \mathbb{N}$.

Каноническое продолжение вполне неоднородной метрики и метрики, алгебра Ли векторных полей Киллинга которой не имеет центра, построено в работах автора. Построенное многообразие обладает свойством наибольшей возможной симметрии и единственности. В данной работе рассматривается случай метрики, алгебра Ли векторных полей которого содержит центр.

Пусть \mathfrak{g} — алгебра Ли всех векторных полей Киллинга риманова аналитического многообразия M и \mathfrak{h}_p — стационарная подалгебра в точке $p \in M$. Множество D точек $p \in M$, для которых $\dim \mathfrak{h}_p > \min \dim \mathfrak{h}_x$ является аналитическим подмножеством, $\text{codim } D \geq 2$. Пусть G — односвязная группа Ли с алгеброй Ли \mathfrak{g} . Будем предполагать, что подгруппа H , порожденная подалгеброй $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, замкнута в G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Правильным аналитическим продолжением локально заданной римановой аналитической метрики называется многообразие M , являющееся расслоенным пространством со слоями G/H и не допускающее сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга и нетривиальных на базе расслоения локальных изометрий. Максимальное правильное продолжение назовем каноническим многообразием.

Теорема. Любая локальная изометрия $\varphi : U \rightarrow N$ из правильного продолжения N в каноническое продолжение M аналитически продолжается до изометрии $\varphi : N \rightarrow M$. Таким образом, каноническое многообразие обладает свойством единственности и максимально возможной симметрией.

ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЧЕРНОВА И ЗАДАЧА КОШИ
ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Д. Ремизов

(Россия, Москва, МГУ; Нижний Новгород, ННГУ)

Из элементарной теоремы анализа о «втором замечательном пределе» следует, что если дифференцируемая в нуле функция $G: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $G(0) = 1$, $G'(0) = L$, то справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(t/n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + tL/n + o(t/n))^n = e^{tL}. \quad (1)$$

Поэтому, если мы желаем решать задачу Коши

$$\frac{d}{dt} U(t) = LU(t), \quad U(0) = u_0, \quad (2)$$

но по каким-то причинам не умеем вычислять экспоненту e^{tL} , зато умеем умножать, делить и вычислять $G(t)$, то решение можно получить в виде

$$U(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(t/n)^n = e^{tL} u_0. \quad (3)$$

Как заметил О. Г. Смолянов [1], согласно теореме Чернова [2] эта схема применима и в случае, если G принимает значения в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ всех ограниченных линейных операторов, действующих в некотором банаховом пространстве \mathcal{F} . Пусть X — бесконечное множество (например, $X = \mathbb{R}^1$), и \mathcal{F} — банахово пространство числовых функций на X , причем в \mathcal{F} действует замкнутый линейный оператор $L: \text{Dom}(L) \rightarrow \mathcal{F}$ с плотной в \mathcal{F} областью определения $\text{Dom}(L) \subset \mathcal{F}$. Задача Коши для эволюционного уравнения (2) относительно неизвестной функции $U: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{F} = L_2(\mathbb{R}^1)$ может быть переписана как задача Коши для эволюционного уравнения

$$u'_t(t, x) = Lu(t, x), \quad u(0, x) = u_0(x) \quad (2')$$

относительно неизвестной функции $u: [0, +\infty) \times X \rightarrow \mathbb{C}$, если положить $(U(t))(x) = u(t, x)$ для всех $t \geq 0$, $x \in X = \mathbb{R}^1$. Как известно [3], в случае существования C_0 -полугруппы $(e^{tL})_{t \geq 0}$ с генератором $(L, \text{Dom}(L))$ решение задачи Коши (2') существует и дается равенством $u(t, x) = (e^{tL} u_0)(x)$ для $t \geq 0$ и $x \in X$.

ПРИМЕР. $\mathcal{F} = L_2(\mathbb{R}^1)$ и $L = iH$, где H — самосопряженный дифференциальный оператор в $L_2(\mathbb{R}^1)$ с переменными коэффициентами. В этом случае (2') — это уравнение Шредингера, а полугруппа с генератором $L = iH$ существует по теореме Стоуна [4].

Сформулируем следующие определения, опуская в них некоторые технические детали (точные формулировки см. [5–8]).

А) Будем говорить, что функция G касается по Чернову оператора L , если оператор $G(0) = I$ (I — тождественный оператор в \mathcal{F}), а $G'(0) = L$; в этом случае выражение $\lim_{n \rightarrow \infty} G(t/n)^n$ называется формальным черновским решением задачи Коши (2').

Б) Будем говорить, что функция G является функцией Чернова оператора L , если существует C_0 -полугруппа $(e^{tL})_{t \geq 0}$ и имеет место равенство (1) (О. Г. Смолянов использовал близкое к Б) определение эквивалентности по Чернову).

Оказывается [5], что если оператор $S(t)$ пр всех $t \geq 0$ самосопряженный, и S касается по Чернову самосопряженного оператора H , то функция $R(t) = e^{i(S(t)-I)}$ является функцией Чернова оператора iH , что позволяет сводить решение уравнения Шредингера к решению уравнения теплопроводности.

Более того [6], если функция G_1 касается по Чернову оператора L_1 , а функция G_2 касается по Чернову оператора L_2 , то при выполнении некоторых технических условий функция $G(t) = G_1(t) + G_2(t) - I$ касается по Чернову оператора $L_1 + L_2$, а функция $G(t) = (G_1(\sqrt{t}) - I)(G_2(\sqrt{t}) - I) + I$ касается по Чернову оператора $L_1 L_2$. Это дает метод построения формального решения уравнения $u'_t = Lu$ в случае, когда L — произвольный дифференциальный оператор с коэффициентами, не зависящими от времени, поскольку он получается путем конечного числа сложений и произведений операторов дифференцирования $(L_1 f)(x) = f'(x)$ и умножения на функцию $(L_2 f)(x) = q(x)f(x)$, а функции Чернова этих операторов известны.

Следует отметить, что не все функции Чернова одинаково удобны с вычислительной точки зрения, что открывает большой простор для дальнейшей работы.

Литература

1. Smolyanov O. G., Tokarev A. G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J. Math. Phys.—2002.—Vol. 43, № 10.—P. 5161–5171.
2. Paul R. Chernoff Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal.—1968—Vol. 2, № 2.—P. 238–242.
3. Engel K. J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.—N. Y.: Springer, 2000.
4. Stone M. H. On one-parameter unitary groups in Hilbert Space // Ann. Math.—1932.—Vol. 33, № 3.—P. 643–648.
5. Remizov I. D. Quasi-Feynman formulas — a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation // J. Funct. Anal.—2016.—Vol. 270, № 12.—P. 4540–4557.
6. Ремизов И. Д. Фейнмановские и квазифейнмановские формулы для эволюционных уравнений // Докл. РАН. Математика.—(Принята к печати).
7. Ремизов И. Д. Решение уравнения Шредингера с помощью оператора сдвига // Мат. заметки.—2016.—Т. 100, № 3.—С. 477–480.
8. Ремизов И. Д. Новый метод получения функций Чернова // Диф. уравнения.—2017.—Т. 53, № 4.—С. 573–576.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОВЯЗКОУПРУГОСТИ

Ж. Д. Тотиева

(Россия, Владикавказ; ГФИ ВНЦ РАН, СОГУ)

Рассматривается система дифференциальных уравнений электромагнитоупругости:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}; \quad \operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{div} D = 0, \quad \operatorname{div} B = 0. \quad (1)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $\rho = \rho(x)$ — плотность неоднородной среды, $\rho(x) > 0$, $u = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ — вектор смещений, $E = (E_1(x, t), E_2(x, t), E_3(x, t))$ и $H = (H_1(x, t), H_2(x, t), H_3(x, t))$ — векторы электрической и магнитной напряженности, $D = (D_1(x, t), D_2(x, t), D_3(x, t))$ и $B = (B_1(x, t), B_2(x, t), B_3(x, t))$ — векторы электрической и магнитной индукции, c — скорость света. В вязкоупругих материалах, имеющих явление пьезоэффекта, для тензора напряжений и компонент электрической и магнитной индукции имеют место представления [3]

$$T_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 c_{ijkl} \left[S_{kl} + \int_0^t K(t-\tau) S_{kl}(x, \tau) d\tau \right] - \sum_{k=1}^3 e_{kij} E_k, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$D_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{jk} E_k + \sum_{k,l=1}^3 e_{jkl} S_{kl}, \quad j = 1, 2, 3, \quad B = \mu H, \quad S_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right),$$

где $c_{ijkl} = c_{ijkl}(x)$ — модули упругости, $K(t)$ — релаксационная функция $e_{kij} = e_{kij}(x)$ — пьезоэлектрические модули, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x)$ — диэлектрические модули, $\mu = \mu(x)$ — магнитная проницаемость. Положим $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$, $e_{kij} = e_{kji}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ [1]. В случае распространения только «медленных» волн пренебрегают малыми поправками s/c , s/c^2 , где s — скорость распространения упругих волн, c — скорость света. Тогда в уравнениях (1) скорость света принимается равной бесконечности [2]. Система уравнений (1) распадается на две группы. Первое уравнение (1) вместе с квазистатическими уравнениями $\operatorname{div} D = 0$, $\operatorname{rot} E = 0$, $E = -\nabla \varphi$ образуют первую группу, а вторую группу составляют уравнения $\operatorname{rot} H = 0$, $\operatorname{div} B = 0$. Как и в работе [2], будем рассматривать анизотропные среды кубической структуры. Имеем

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = L \left[K, \frac{\partial}{\partial x_3} \left(c_{44} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + c_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \right. \\ \left. + c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (c_{12} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(e_{14} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) + e_{14} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = & L \left[K, \frac{\partial}{\partial x_3} \left(c_{44} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + c_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + \right. \\ & \left. + c_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + c_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (c_{12} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(e_{14} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + e_{14} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = & L \left[K, \frac{\partial}{\partial x_3} \left(c_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + c_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right] + e_{14} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + e_{14} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(e_{14} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(e_{14} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(e_{14} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(e_{14} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(e_{14} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(e_{14} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left(L \left[K, c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + c_{44} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right] + e_{14} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_3=+0} = 0, \quad (6)$$

$$\left(L \left[K, c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{44} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right] + e_{14} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_3=+0} = 0, \quad (7)$$

$$\left(L \left[K, c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] \right) \Big|_{x_3=+0} = 0, \quad (8)$$

$$u_i \Big|_{t < 0} \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad \varphi \Big|_{x_3=+0} = \delta(x_1) \delta(t), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = 0. \quad (9)$$

Далее предполагаем, что модули упругости c_{11} , c_{12} , c_{44} , плотность ρ , пьезоэлектрический модуль e_{14} и диэлектрический модуль ε являются функциями только одной переменной x_3 , вектор-функция $(\rho, c_{11}, c_{12}, c_{44})$ принадлежит классу $\Lambda = \{(\rho(x_3), c_{11}(x_3), c_{12}(x_3), c_{44}(x_3)) : \rho > 0, c_{44} > 0, c_{11} > c_{12}, c_{11} + 2c_{12} > 0, \rho(+0) = 0, c'_{11}(+0) = 0, c'_{44}(+0) = 0, \rho, c_{44} \in C^2(R_+), c_{11}, c_{12} \in C^1(R_+)\}$, $R_+ = [0, \infty)$, ε — положительная функция из класса $C^1(R_+)$, $K(t) \in C^2(R_+)$. Предметом настоящего исследования является обратная задача определения пьезоэлектрического модуля $e_{14}(x_3)$, $x_3 > 0$, входящего в систему равенств (2)–(5), если относительно преобразования Фурье второй компоненты смещения U_2 известна дополнительная информация $\frac{\partial}{\partial \nu} U_2(x_3, t, \nu) \Big|_{x_3=+0, \nu=+0} = g(t)$, $t > 0$, где $g(t)$ — заданная функция.

Введем в рассмотрение новую переменную y по формуле $y = \psi(x_3) := \int_0^{x_3} \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{c_{44}(\xi)}} d\xi$. Через $\psi^{-1}(y)$ обозначим функцию, обратную к $\psi(x_3)$. Основные результаты исследования составляют следующие теоремы разрешимости и устойчивости решения обратной задачи.

Теорема 1. Пусть T — фиксированное положительное число, $X = \psi^{-1}(T/2)$, функция $g(t) \in C[0, T]$. Тогда существует единственное решение обратной задачи $e_{14}(x_3) \in C^1[0, X]$.

Пусть $E(\delta)$ — множество функций $e_{14}(x_3) \in C^1[0, X]$ таких, что при $x_3 \in [0, X]$ справедливо неравенство $\|e_{14}(x_3)\|_{C[0, X]} \leq \delta$ с фиксированной положительной постоянной δ .

Теорема 2. Пусть T — фиксированное положительное число, $X = \psi^{-1}(T/2)$, $e_{14}(x_3), e_{14}^*(x_3) \in E(\delta)$ являются решениями обратной задачи с данными $\{\rho(x_3), c_{44}(x_3), K(t), g(t)\}$, $\{\rho^*(x_3), c_{44}^*(x_3), K^*(t), g^*(t)\}$ соответственно. Тогда найдется такое положительное число

$$C = C(\delta, M, T),$$

$$M = \max \left\{ \|\rho(x_3)\|_{C^2[0, X]}, \|c_{44}(x_3)\|_{C^2[0, X]}, \|K(t)\|_{C^2[0, T]}, \|g(t)\|_{C[0, T]}, \right. \\ \left. \|\rho^*(x_3)\|_{C^2[0, X]}, \|c_{44}^*(x_3)\|_{C^2[0, X]}, \|K^*(t)\|_{C^2[0, T]}, \|g^*(t)\|_{C[0, T]} \right\},$$

что справедлива оценка устойчивости

$$\|e_{14}(x_3) - e_{14}^*(x_3)\|_{C[0, X]} \leq \\ \leq C \left[\|\rho - \rho^*\|_{C^3[0, X]} + \|c_{44} - c_{44}^*\|_{C^2[0, X]} + \|K - K^*\|_{C^2[0, T]} + \|g - g^*\|_{C[0, T]} \right].$$

Литература

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах.—М.: Науки, 1982.—421 с.
2. Яхно В. Г., Меражов И. З. Некоторые прямые задачи и одномерная обратная задача электроупругости для «медленных» волн // Мат. тр.—1999.—Т. 2, № 2.—С. 148–213.
3. Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 3.—С. 553–572.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ
НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО СТЕРЖНЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Х. Г. Умаров

(Россия, Грозный; АН ЧР)

Для дифференциального уравнения, описывающего продольные колебания нелинейно-упругого стержня:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2,$$

где α, β — заданные параметры, исследована разрешимость задачи Коши в пространстве непрерывных функций на всей числовой оси.

Найден явный вид решения соответствующего линейного уравнения. Установлен временной отрезок существования классического решения задачи Коши для нелинейного уравнения и получена оценка нормы этого локального решения. Рассмотрены условия существования глобального (определенного для $t \geq 0$) решения.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ РЯДОВ ЧЕБЫШЕВА НА КЛАССЕ
ФУНКЦИЙ, ОБРАЩАЮЩИХСЯ В НУЛЬ НА ЛЕВОМ КОНЦЕ
И В БЕСКОНЕЧНОСТЬ НА ПРАВОМ КОНЦЕ
ИНТЕРВАЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Ш. С. Хубежты

(Россия, Владикавказ; ЮМИ, СОГУ)

Теория сингулярных интегральных уравнений из-за многочисленных приложений переживает бурное развитие. Этим уравнениям посвящены фундаментальные труды широко известных математиков: Д. Гильберта, А. Пуанкаре, В. Карлемана, Н. И. Мусхелишвили, С. Г. Михлина, З. Пресдорфа и т. д.

Однако решение сингулярных интегральных уравнений возможно лишь в исключительных случаях и основным аппаратом в прикладных задачах являются численные методы. В этом направлении должен отметить труды В. В. Иванова, И. К. Лифанова, Б. Г. Габдулхаева, Д. Г. Саникидзе, И. В. Бойкова и т. д. Но надо отметить, что указанные авторы в основном рассматривают методы, в которых находят приближенные значения решения в конечном числе точек. Во многих случаях требуется получить аналитические приближенные решения, годные на всем отрезке. К этому типу методов принадлежат методы, связанные многочленами Чебышева, разработанные для интегральных уравнений [3].

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение I рода:

$$K\varphi_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x,t) \varphi_0(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $-1 < x < 1$, $k(x, t)$, $f(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_0(t)$ — неизвестная функция.

В задачах механики и теории упругости чаще всего встречаются случаи, когда $\varphi_0(t)$ ищется в виде [2]

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \sqrt{1-t^2} \varphi(t), & \varphi_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \varphi(t), \\ \varphi_0(t) &= \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi(t), & \varphi_0(t) &= \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \varphi(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi(t)$ — достаточно гладкая функция на отрезке $[-1, 1]$.

Первый случай соответствует индексу $\varkappa = -1$, второй случай — индексу $\varkappa = 1$. Нами в статье [6] изучены эти случаи. Построены вычислительные схемы с применением рядов Чебышева для приближенного решения уравнения (1).

В этой заметке мы будем рассматривать случай

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi(t).$$

В этом случае индекс интегрального уравнения (1) $\varkappa = 0$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$K_0\varphi \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} k(x,t) \varphi(t) dt = f(x). \quad (3)$$

Как известно [1, 2] уравнение (3) имеет единственное решение, т. е. оператор K_0 имеет обратный K_0^{-1} . Теперь разложим $\varphi(t)$, $k(x,t)$, $f(x)$ в ряды по многочленам Чебышева III рода вида $C_n(x) = \frac{\cos \frac{2n+1}{2} \arccos x}{\cos \frac{1}{2} \arccos x}$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k(t), \\ k(x,t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{il} C_i(x) C_l(t), \\ f(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} d_i C_i(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) — неизвестные, так как функция $\varphi(t)$ — неизвестная. Остальные коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{il} &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} k(x,t) C_i(x) dx \right) C_l(t) dt, \\ d_i &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} f(t) C_i(t) dt. \end{aligned}$$

Подставляя разложения (4) в (3) получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{1}{t-x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k(t) \right) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{il} C_i(x) C_l(t) \right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} d_i C_i(x). \end{aligned}$$

Используя формулу обращения [5]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_k(t)}{t-x} dt = S_k(x),$$

где $S_k(x) = \frac{\sin \frac{2k+1}{2} \arccos x}{\sin \frac{1}{2} \arccos x}$ — многочлен Чебышева IV рода, и свойства ортогональных многочленов Чебышева III рода, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k S_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{i=0}^{\infty} c_{ik} C_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i C_i(x). \quad (5)$$

Разложим еще многочлен Чебышева $S_k(x)$ в ряд Чебышева по многочленам $C_i(x)$. Имеем

$$S_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{ki} C_i(x),$$

где

$$b_{ki} = \begin{cases} 2, & i < k, \\ 1, & i = k, \\ 0, & i > k. \end{cases}$$

Тогда из уравнения (5) получается система уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{ki} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_{ki} = d_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Система (6) — это бесконечная система с бесконечным числом неизвестных. Ее можно решить приближенно, рассматривая систему

$$\sum_{k=0}^n a_k (b_{ki} + c_{ki}) = d_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Тогда приближенное решение будет выражаться функцией

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k C_k(x). \quad (8)$$

Указанная вычислительная схема обосновывается и справедлива (см. [4])

Теорема. Если функции $k(x, t)$ и $f(x)$ принадлежат классу $H_r(\alpha)$ (т. е. имеют непрерывные производные до порядка $r - 1$, а производная порядка r удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α ($0 < \alpha \leq 1$)). Тогда, начиная с некоторого n , система (7) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta}}\right) \quad (0 < \beta < \alpha),$$

где $\varphi(t)$ — решение уравнения (3), а $\varphi_n(t)$ — ее приближенное решение вида (8).

Литература

1. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1966.—512 с.
2. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО «Янус», 1995.— 520 с.
3. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.—М.: Наука, 1983.—384 с.
4. Бойков И. В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений.— Пенза: Изд-во Пензен. гос. ун-та, 2004.—316 с.
5. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2011.—236 с.
6. Бесаева З. В., Хубежты Ш. С. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с применением рядов Чебышева // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 4.— С. 15–22.

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ
ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ
ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА В СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ
С ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВНЕШНЕЙ СФЕРОЙ

А. С. Черныш

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассматривается стационарное течение жидкости в сферическом слое $D = \{1 \leq |\mathbf{x}| \leq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$, описываемое уравнениями Навье — Стокса:

$$(\mathbf{V}, \nabla)\mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}|_{r=r_1} = \gamma_1, \quad (3)$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}|_{r=r_2} = \gamma_2, \quad (4)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{V}|_S = \mathbf{n} \times \mathbf{V}^+. \quad (5)$$

Здесь \mathbf{V} — векторное поле, характеризующее течение, p — давление, ρ — плотность жидкости, а $\nu = 1/\operatorname{Re}$ — вязкость.

Поле \mathbf{V}^+ обозначает тангенциальную скорость на границе ∂D области D , а ненулевые скалярные функции γ_1 и γ_2 — нормальную скорость. Предполагается также, что расход жидкости через ∂D постоянен, что влечет следующее соотношение между компонентами нормальной скорости:

$$\int_{r=r_1} \gamma_1 ds = \int_{r=r_2} \gamma_2 ds.$$

Заметим, что как только задание функций γ_1 и γ_2 определяет вход и выход потока. Так, если $\gamma_1 < 0$ и $\gamma_2 > 0$, то $\{r = r_1\}$ — вход потока, а $\{r = r_2\}$ — выход; и наоборот, если $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 < 0$.

Предполагается, что жидкость втекает в область и вытекает из нее с постоянной скоростью. С помощью метода Вишика — Люстерника (см. [5–6]), следуя [1], строится асимптотика решения указанной задачи при $\nu \rightarrow 0$. Для этого каждое приближение проектируется на пространство векторных сферических гармоник (см. [7–8]). Это позволяет разделить переменные и свести исходную задачу к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. В итоге, решение (1)–(5) можно представить в виде

$$\mathbf{V} = \sum_{k=0}^n \nu^k \sum_{j=0}^{t(k)} \left(U_j(r, s) L_j(\theta) \mathbf{e}_r + V_j(r, s) \frac{dL_j(\theta)}{d\theta} \mathbf{e}_\theta \right),$$

где $s = (a-r)/\nu$, а $L_k(\theta)$ — многочлен Лежандра порядка k . Заметим, что согласно методу Вишика — Люстерника решение ищется в виде суммы т. н. внешнего и внутреннего разложений. При этом, внешнее разложение описывает решение

вблизи внешней сферы, вращающейся с постоянной скоростью, а внутреннее — во всей остальной области. Таким образом, U_j, V_j представимы в виде

$$U_j(r, s) = U_j^i(r) + U_j^b(r), \quad (6)$$

$$V_j(r, s) = V_j^i(r) + V_j^b(r). \quad (7)$$

Здесь функции с индексом b соответствуют внешнему решению, а i — внутреннему. Далее система Навье — Стокса линеаризуется на полученном потоке и способом, указанным в [2–4], строится асимптотика собственных чисел и собственных функций, которые ищутся в виде равномерных рядов по ν :

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \lambda_k, \quad \mathbf{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \mathbf{v}_k(r, s, \theta, \varphi), \quad p = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k p_k(r, s, \theta, \varphi). \quad (8)$$

Давление и поле скорости также представляются в виде внутреннего и внешнего разложений:

$$\mathbf{v}_k(r, s, \theta, \varphi) = \mathbf{v}_k^i(r, \theta, \varphi) + \mathbf{v}_k^b(s, \theta, \varphi), \quad (9)$$

$$p_k(r, s, \theta, \varphi) = p_k^i(r, \theta, \varphi) + p_k^b(s, \theta, \varphi). \quad (10)$$

Каждое приближение представляется в виде рядов по векторным сферическим гармоникам.

Собственные значения определяются из условия разрешимости задачи для радиальной компоненты внутреннего разложения решения. При этом, теорема Пойа (см. [9]) позволяет установить, что все собственные значения расположены строго в левой полуплоскости.

В итоге, построен итерационный процесс, который определяет асимптотику собственных значений и собственных функций для произвольного приближения стационарного течения рассматриваемой задачи.

Литература

1. Ilin K. Viscous boundary layers in flows through a domain with permeable boundary // Eur. J. Mech. B-Fluids.—2008.—№ 27.—P. 514–538.
2. Ilin K., Morgulis A. Inviscid instability of an incompressible flow between rotating porous cylinders to three-dimensional perturbations // Eur. J. Mech. B-Fluids.—2017.—№ 61.—P. 46–60.
3. Ilin K., Morgulis A. Instability of an inviscid flow between porous cylinders with radial flow // J. Fluid Mech.—2013.—№ 730.—P. 364–378.
4. Ilin K., Morgulis A. Instability of a two-dimensional viscous flow in an annulus with permeable walls to two-dimensional perturbations // Phys. Fluids.—2015.—Vol. 27, № 4.—P. 1.4919095.—DOI: 10.1063/1.4919095.
5. Вишик М. И., Люстерник Л. М. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук.—1957.—Т. 12, № 5.—С. 3–122.
6. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Мир, 1968.—448 с.
7. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960.—942 с.
8. Hill E. L. The theory of Vector Spherical Harmonics // Am. J. Phys.—1954.—Vol. 22.—P. 211–214.
9. Седлецкий А. М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.—504 с.

СМЕШАННОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Т. К. Юлдашев

(Россия, Красноярск; СибГАУ)

Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений и дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., например, [1–5]). В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме. Задачи, где меняется тип дифференциального уравнения в рассматриваемой области, имеют важные приложения (см. [6–8]). Дифференциальные уравнения смешанного типа изучались в работах многих авторов, в частности, в [9–16].

В настоящей работе рассматриваются вопросы однозначной разрешимости и построения решения одной нелокальной краевой задачи для смешанного однородного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с вырожденным ядром. Используется метод Фурье, основанный на разделении переменных. Задача сводится к счетным системам алгебраических уравнений. Устанавливается критерий однозначной классической разрешимости задачи и доказывается соответствующая теорема.

Итак, в области $\Omega = \{(t, x) \mid -T < t < T, 0 < x < l\}$ рассматривается смешанное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{ttxx} + U_{xx} + \nu_1 \int_0^T K_1(t, s) U(s, x) ds = 0, & t > 0, \\ U_{tt} - U_{ttxx} - U_{xx} + \nu_2 \int_0^T K_2(t, s) U(s, x) ds = 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где T и l — заданные положительные действительные числа, ν_j — действительный спектральный параметр, $K_j(t, s) = \sum_{i=1}^k a_{ji}(t)b_{ji}(s)$, $a_{ji}(t), b_{ji}(s) \in C[-T; T]$, $j = 1, 2$. Здесь предполагается, что функции $a_{ji}(t)$ и $b_{ji}(s)$ являются линейно независимыми, $j = 1, 2$.

Задача. Найти в области Ω функцию

$$U(t, x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup \{x = 0\} \cup \{x = l\}) \cap C^2(\Omega_+ \cup \Omega_-) \cap C_{t,x}^{2+2}(\Omega_+ \cup \Omega_-),$$

удовлетворяющую уравнению (1) и следующим условиям:

$$\begin{aligned} \int_0^T U(t, x) dt = \varphi(x), \quad \int_{-T}^0 U(t, x) dt = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ U(t, 0) = U(t, l) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где $C^r(\Omega)$ — класс функций, имеющих непрерывные производные $\frac{\partial^r}{\partial t^r}$, $\frac{\partial^r}{\partial x^r}$ в области Ω , $C_{t,x}^{r+s}(\Omega)$ — класс функций, имеющих непрерывную производную $\frac{\partial^{r+s}}{\partial t^r \partial x^s}$ в области Ω , $r = \overline{1, r_0}$, $s = \overline{1, s_0}$, $1 < r_0$, $1 < s_0$ — натуральные числа, $\varphi(x)$, ψ — заданная достаточно гладкая функция, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $\Omega_- = \{(t, x) \mid -T < t < 0, 0 < x < l\}$, $\Omega_+ = \{(t, x) \mid 0 < t < T, 0 < x < l\}$, $\overline{\Omega} = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l\}$.

Отметим, что обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения с вырожденным ядром рассматривались в работах [17, 18].

Литература

1. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р. О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне // Журн. Средневолж. мат. о-ва.—2010.—Т. 12, № 3.—С. 37–42.
2. Турбин М. В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель — Балкли // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2013.—№ 2.—С. 246–257.
3. Шабров С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2015.—№ 2.—С. 168–179.
4. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.—М.: Мир, 1977.—622 с.
5. Venney D. J., Luke J. C. Interactions of permanent waves of finite amplitude // J. Math. Phys.—1964.—Vol. 43.—Р. 309–313.
6. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.—1959.—Т. 14, № 3.—С. 3–19.
7. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике.—М.: Наука, 1973.—711 с.
8. Уфлянд Я. С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инж.-физ. журн. —1964.—Т. 7, № 1.—С. 89–92.
9. Апаков Ю. П. Трехмерный аналог задачи Трикоми для парабологиперболического уравнения // Сиб. журн. индустр. математики.—2011.—Т. 14, № 2.—С. 34–44.
10. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений парабологиперболического типа.—Ташкент: Фан, 1986.—220 с.
11. Моисеев Е. И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Диф. уравнения.—2001.—Т. 37, № 11.—С. 1565–1567.
12. Репин О. А. Аналог задачи Нахушева для уравнения Бицадзе — Лыкова // Диф. уравнения.—2002.—Т. 38, № 10.—С. 1412–1417.
13. Сабитова К. Б. К теории уравнений смешанного типа.—М.: Физматлит, 2014.—301 с.
14. Сабитова Ю. К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Мат. заметки.—2015.—Т. 98, № 3.—С. 393–406.
15. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром.—Ташкент: Фан, 1997.—165 с.
16. Юлдашев Т. К. Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка // Изв. ИМИ Удмурт. гос. ун-та.—2016.—Т. 47, № 1.—С. 119–128.
17. Юлдашев Т. К. Обратная задача для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром и нелокальными интегральными условиями // Вестн. Твер. гос. ун-та. Сер. Прикл. математика.—2016.—№ 3.—С. 19–33.
18. Юлдашев Т. К. Обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение с вырожденным ядром и интегральным условием // Вестн. Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2016.—Т. 20, № 4.—С. 644–655.

Секция III

Математическое моделирование

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ТРАССИРОВКИ ЗВУКОВЫХ ЛУЧЕЙ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ОБХОДА
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЯЧЕЕК

Л. Е. Алпеева

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассматривается модель распространения звуковых лучей в замкнутом пространстве на примере концертного зала, реализованная с помощью алгоритма трассировки лучей с использованием метода обхода ячеек. Звуковой луч здесь вводится как линия, совпадающая по направлению с нормалью к фронту распространяющейся звуковой волны.

Известно, что волновой процесс в сплошной среде можно исследовать разными методами. В рассматриваемой задаче, например, на средней частоте 1 кГц длина волны равна примерно 30 см. Характерный размер зала составляет 30 м, что больше длины волны на два порядка. Поскольку на каждую длину волны нужно брать хотя бы 10 узлов численной сетки, практика показывает, что стандартные численные методы типа метода конечных элементов в подобных задачах не приводят к успеху за разумное время. В связи с этим был выбран алгоритм трассировки звуковых лучей или, что то же самое, алгоритм лучевых траекторий, который гарантирует решение задачи в реальном времени на ПК. Отметим, что данный алгоритм построен в виде работающего программного комплекса с использованием метода обхода пространственных ячеек, реализованного в варианте быстрого алгоритма, что также дает заметное ускорение работы программы.

Алгоритм трассировки принадлежит группе геометрических методов, которые позволяют получить полную структуру многократных отражений звуковых лучей и импульсный отклик помещения [1]. Он заключается в том, что из точки источника звука с определенным шагом по пространственному углу равномерно по всем направлениям запускается большое количество звуковых лучей. Каждый луч путешествует по помещению, теряя энергию при каждом отражении согласно уравнению

$$E_{\text{new}} = E_{\text{old}}(1 - \alpha),$$

где α — коэффициент звукопоглощения плоскости, E_{old} и E_{new} — значения энергии соответственно до и после столкновения луча с плоскостью.

Процесс прохода звукового луча по пространству моделируется с помощью быстрого метода обхода ячеек, представленного в [2] как перемещение луча из одной ячейки в другую. Ниже приведен фрагмент псевдокода, описывающий процесс перехода луча в следующую ячейку для плоской модели.

```
if(tMaxX < tMaxY)
    { tMaxX = tMaxX + tDeltaX; X = X + stepX; }
else { tMaxY = tMaxY + tDeltaY; Y = Y + stepY; }
NextVoxel(X, Y);
```

Здесь X, Y — координаты стартовой ячейки, $\text{stepX}(\text{stepY})$ — значения шага по оси абсцисс (ординат), величины $t\text{MaxX}(t\text{MaxY}), t\text{DeltaX}(t\text{DeltaY})$ — промежутки времени, за которые луч достигнет ближайшую вертикальную (горизонтальную) границу вообще или в пределах текущей ячейки. Отметим, что основным преимуществом метода является его простота — одна итерация предполагает всего одну операцию сравнения и два сложения — и, как следствие, быстрое действие.

В настоящей работе исследуется распространение звуковых лучей для плоской модели. Положение луча $\vec{u}(t) = \{x(t), y(t)\}$ зависит от координат его начала $\vec{u}_0 = \{x_0, y_0\}$ и направляющих косинусов $\vec{v} = \{r_x, r_y\}$, $r_x^2 + r_y^2 = 1$:

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_0 + t\vec{v}, \quad t \geq 0.$$

В качестве примера рассматривается помещение, которое для применения метода обхода ячеек разбивается на ячейки. При реализации алгоритма трассировки движение звуковых лучей анализируется до тех пор, пока их громкость не упадет на 30 дБ, т. е. пока их амплитуда давления не уменьшится в 10^3 раз. При попадании луча в окрестность приемника фиксируется амплитуда энергии луча и время, в течение которого он находился в движении. Амплитуды энергии лучей, которые проходят через малую окрестность с центром в точке приема приблизительно в одинаковое время, суммируются и формируют зависимость квадратов акустического импульса $p^2(t)$ от времени при $t \geq 0$.

Определение основных акустических параметров является неотъемлемой частью данного исследования. *EDT* (время ранних затуханий) показывает, как долго громкость звука падает на 10 дБ. Время реверберации *T30* описывает время, прошедшее с момента падения громкости на 5 дБ до падения на 35 дБ. Эти параметры находятся с помощью функции Шредера $S(t)$, которая представляет собой проинтегрированные в обратном порядке значения $p^2(t)$. *EDT* определяется как умноженное на 6 время, отвечающее падению $S(t)$ на 10 дБ. Аналогично, *T30* находится умножением на 2 промежутка времени между метками 5 и 35 дБ. За ясность звучания отвечает параметр *C80* (дБ); параметр *D50* (%) характеризует степень разборчивости речи:

$$C80 = 10 \lg \frac{\int_0^{80} p^2(t) dt}{\int_{80}^{\infty} p^2(t) dt}, \quad D50 = \frac{\int_0^{50} p^2(t) dt}{\int_{50}^{\infty} p^2(t) dt}.$$

На основании рассчитанных значений акустических параметров исследуемый концертный зал можно оценить как удовлетворительный для проведения мероприятий, предполагающих хорошее качество распространения звука.

Литература

1. Тодоров Н. Ф. Метод лучевых траекторий при моделировании распространения волн в акустических средах: Дис. ... канд. тех. наук.—Ростов н/Д., 2014.
2. Amantides J., Woo A. A Fast Voxel Traversal Algorithm for Ray Tracing // In Eurographics'87.—Toronto: Univ. of Toronto, 1987.—Р. 3–10.

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ

М. А. Артемов (Россия, Воронеж; ВГУ),
Е. С. Барановский (Россия, Воронеж; ВГУ)

Рассматривается задача определения напряженного и деформированного состояния тонкого диска цилиндрической формы, проявляющего упругие и пластические свойства при тепловом воздействии [1]. В центральной области диска $0 \leq r \leq a$ температурное поле является однородным $T = T^*$ и может изменяться с течением времени. На внешней границе диска $r = b$ задана температура T_0 и давление p . Процесс изменения внешних воздействий считается квазистационарным. Приближение плоского напряженного состояния позволяет определять напряженное состояние без вычисления деформированного состояния.

Ниже излагается алгоритм решения рассматриваемой задачи, когда для изотропного однородного идеального упруго-пластического тела выбран кусочно-линейный пластический потенциал общего вида. Функция текучести совпадает с пластическим потенциалом. Условие пластичности имеет следующий вид: $\max\{\alpha_i \sigma_\varphi + \beta_i \sigma_r + \gamma_i \sigma_z : i = 1, \dots, n\} = 2k, n \geq 3$.

Выбор кусочно-линейного пластического потенциала позволяет выполнить интегрирование соотношений закона нормальной связи.

ШАГ 1. В предположении, что диск находится в упругом состоянии, определяется напряженное состояние [2]. В области $0 \leq r \leq a$ реализуется однородное напряженное состояние $\sigma_r = \sigma_\varphi = \text{const}$. В области упругого состояния диска функция текучести принимается в качестве эквивалентного напряжения. Анализ формул показывает, что в зависимости от радиуса диска наибольшее значение эквивалентное напряжение принимает в области $0 \leq r \leq a$ или при $r = b$.

Обозначим через T_a значение T^* , когда область диска $0 \leq r \leq a$ переходит в пластическое состояние, а через T_b — значение T^* , когда на границе $r = b$ зарождается пластическая область.

ШАГ 2. Определяем зависимость T_a и T_b от радиуса диска b .

Анализ результатов, полученных на втором шаге, позволяет найти значение $b = b_k$, для которого $T_a = T_b$. Если $a < b \leq b_k$, то при увеличении значения T^* пластическая зона сначала зарождается на внешней границе $r = b$, а функция $T_a(b)$ является монотонно возрастающей. Если $b_k < b$, то при увеличении значения T^* пластическая область сначала зарождается в центральной части диска $0 \leq r \leq a$, а функция $T_b(b)$ является монотонно убывающей. Эта информация позволяет выбрать одну из возможных ветвей алгоритма.

Рассмотрим случай, когда $b_k < b$.

ШАГ 3. В пластической области задача является статически определимой. Поскольку задание давления на границе $r = b$ определяет режим пластичности, реализующийся на этой границе, то независимо от поля температур определяются границы c_i зон, в которых реализуются конкретные допустимые режимы пластичности $\alpha_i \sigma_\varphi + \beta_i \sigma_r + \gamma_i \sigma_z = 2k$ во внешней пластической области, примыкающей к границе $r = b$.

Так как значение T^* , для которого в области $0 \leq r \leq a$ возникает вторая (внутренняя) пластическая область, зависит от радиуса внутренней границы c_b внешней пластической области, то необходимо выполнить следующие шаги.

ШАГ 4. Определяем число допустимых режимов пластичности во внешней пластической области (алгоритм реализуется при выборе конкретного условия текучести). Например, для условия текучести максимального приведенного напряжения число возможных режимов равно двум.

ШАГИ $5 \div N$. Полагая, что при зарождении внутренней пластической области во внешней пластической области реализуется только один режим пластичности (назовем его первым), из уравнений $(\alpha_1 \sigma_\varphi + \beta_1 \sigma_r)|_{r=b} = 2k$, $\sigma_r|_{r=a} = -k$ определяем, для каких значений величин $T^* = T_1$ и $b = b_1$ внутренний радиус внешней пластической области равен радиусу границы, на которой происходит смена режима пластичности. Аналогично определяются $T^* = T_i$ и $b = b_i$ для остальных возможных режимов во внешней пластической области. Выбирая конкретные значения параметров T^* и b , устанавливаем, в какие интервалы $T_i < T^* < T_{i+1}$ и $b_i < b < b_{i+1}$ они попадают. Из условия непрерывности напряжений определяем внешнюю границу $r = c_a$ внутренней пластической области и внутреннюю границу $r = c_b$ внешней пластической области. Формулы для напряжений в пластических и упругой областях известны. Процедура определения деформаций и перемещений в диске также хорошо известна [3, 4].

Аналогичным образом строится алгоритм при $b > b_k$. Приведенный алгоритм остается практически неизменным при решении других аналогичных задач.

Для верификации решения задачи можно выполнить построение графиков эквивалентного напряжения $\sigma_{eq}^{(i)} = \alpha_i \sigma_\varphi + \beta_i \sigma_r$ для допустимых режимов пластичности, если они установлены, и для всех режимов пластичности, если допустимые режимы не установлены в ходе решения задачи.

Наибольшее число задач термопластичности решалось при выборе условия пластичности Треска [2]. Отметим, что в случае плоского напряженного состояния реализация сингулярных режимов пластичности $\sigma_r = \text{const}_1$, $\sigma_\varphi = \text{const}_2$ противоречит уравнению равновесия. Исключение составляет режим полной пластичности $\sigma_\varphi = \sigma_r = \pm k$, который реализуется только в некоторых случаях, например, в рассмотренной задаче.

Литература

1. Orsan Y., Gamer U. Elastic-plastic deformation of a centrally heated cylinder // Acta Mech.—1991.—Vol. 90.—P. 61–80.
2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости.—М.: Наука, 1975.—576 с.
3. Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П. Соотношения изотропии и ассоциированный закон течения // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2014.—№ 4.—С. 81–90.
4. Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П. Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластичности и их обобщения // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2015.—№ 1.—С. 71–82.

К ВОПРОСУ ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ПРОЦЕССА ОСЕДАНИЯ БУГРА ГРУНТОВЫХ ВОД В ОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ

Афанаскина И. В. (Россия, Орел; ОГУ),
Дорофеева В. И. (Россия, Орел; ОГУ)

Постановка двумерной задачи об одновременной фильтрации двух жидкостей в пористой среде в постановке Лейбензона — Маскета при наличии дренажного устройства и одного или нескольких полупроницаемых включений произвольной формы описана в [1]. При пренебрежении вязкостью и плотностью внешней жидкости получаем систему интегрального и дифференциального уравнений, которая описывает опускание грунтовых вод под действием силы тяжести и при наличии дренажного устройства для откачки воды и одного полупроницаемого включения в пласте грунта [1].

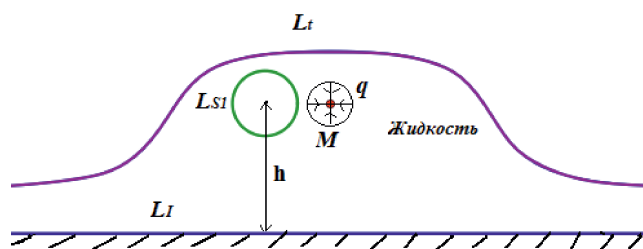


Рис. 1. Постановка задачи оседания бугра грунтовых вод.

Дифференциальное уравнение движения границы L_t имеет вид [1]

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = V_0 + \sum_{k=S_1, t} \mathbf{V}[g_k, L_k](\bar{x}) \quad \text{на } L_t,$$

Здесь $V_0 = K \text{grad } \phi_0$ — скорость квазипотенциала невозмущенного течения ϕ_0 . Область совместной фильтрации жидкостей ограничена непроницаемой прямой L_I , разделяющей грунт и непроницаемые породы.

Задача исследовалась при наличии одного включения при различных значениях параметра λ_{S_1} [1]. Численная реализация выполнялась методом дискретных особенностей. Первоначальная высота бугра $H_0 = 1.35$. На рис. 2 построены последовательные положения подвижной границы L_t в моменты времени $t = 0; 1/3T; 2/3T; T$, где $T = 0.06$ — время достижения стока, а на рис. 3 — поле скоростей в момент времени $t = 0$. В Таблице 1 представлена зависимость времени T от числа точек разбиения n границы L_t в каждый момент времени.

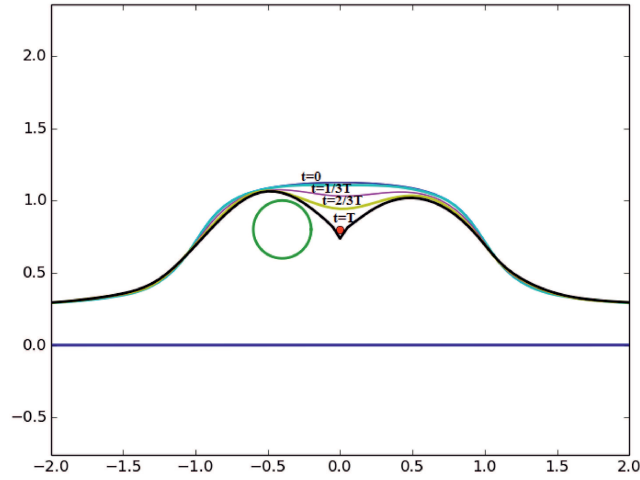


Рис. 2. Эволюция границы оседания бугра грунтовых вод в однородном слое при $n = 400$, $dt = 0.005$, $\lambda_{S_1} = 0.7$, $q = \Pi$.

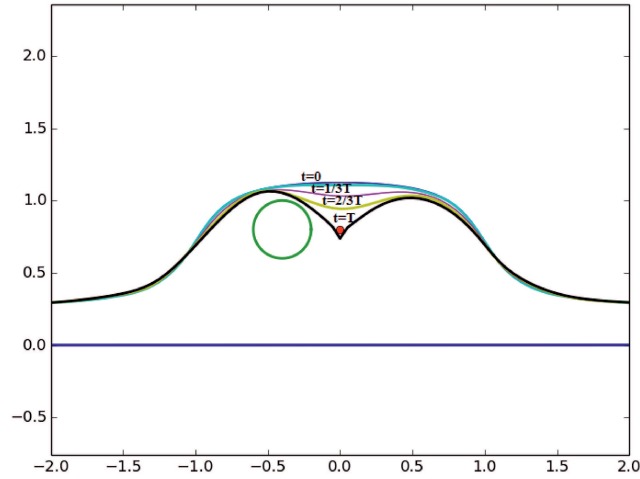


Рис. 3. Поле скоростей в момент времени $t = 0$ при $n = 400$, $q = \Pi$, $\lambda_{S_1} = 0.7$.

n	200	400	600	800
$T_{\Delta t/2}$	0.7	0.65	0.6	—
$\eta_{\Delta t/2}, \%$	—	7.14	7.69	—
$T_{\Delta t/4}$	0.13	0.7	0.0625	0.6
$\eta_{\Delta t/4}, \%$	—	46.15	10.71	4

Таблица 1. Зависимость времени T от числа точек разбиения n .

Дальнейшие исследования будут проводиться при произвольном размещении включений и дренажного устройства в области процесса.

Литература

1. Афанаскина И. В., Дорофеева В. И., Чистякова К. Г. Исследование задачи оседания грунтовых вод при наличии полупроницаемых включений и дренажной системы // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование: тез. докл. XIII Междунар. науч. конф.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016.—С. 143–144.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЛИНЫ УЛИЦ И ВЫСОТЫ ДОМОВ НА ДВИЖЕНИЕ ВОЗДУХА В ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ГОРОДСКОЙ ЗАСТРОЙКИ

М. В. Волик

(Россия, Владикавказ; Финансовый университет, ЮМИ)

Трехмерное моделирование физических процессов в городской застройке используется при решении задач прогнозирования и оценки рисков последствий чрезвычайных ситуаций, определения неблагоприятных зон высоких скоростей ветра и концентрации загрязняющих веществ и т. д.

В работе проведено сравнительное исследование трех конфигураций городской застройки с использованием свободно-распространяемого программного обеспечения OpenFoam и удаленного доступа к консоли на управляющем узле вычислительного кластера JSCC RAS Cluster Console (<https://unihub.ru/resources/js3console>) WEB-лаборатории UniHUB [1]. Во всех вариантах расчетов моделировался поток воздуха слева направо. Ось X была направлена перпендикулярно улицам, ось Y — вдоль улиц, ось Z — вертикально вверх. Городская застройка представляла собой три дома, последовательно расположенных по потоку: в форме кубов размерами $1\text{ м} \times 1\text{ м} \times 1\text{ м}$, в форме параллелепипедов с домами одинаковой высоты размерами $1\text{ м} \times 10\text{ м} \times 1\text{ м}$ и с более высоким домом размером $1\text{ м} \times 10\text{ м} \times 2\text{ м}$ между улиц. Конфигурация городской застройки, состоящая из трех последовательно расположенных домов в форме куба, чаще всего используется для тестирования математических моделей и экспериментальных исследований в аэродинамических трубах.

Во всех вариантах расстояние от входной границы до первого дома выбиралось равным десяти его высотам, расстояние от третьего дома до выходной границы — двадцати высотам, расстояние от нижней границы расчетной области до верхней — шести высотам, расстояние от застройки до боковых границ — двум высотам, расстояние между домами — двум высотам. Серия вычислительных экспериментов проводилась для интервала времени от 0 до 20 с (с шагом 0.001 с).

Результаты проведенных вычислительных экспериментов показали, что изменение конфигурации городской застройки приводит не только к количественному, но и к существенному качественному изменению картины течения воздуха и его скорости. Это означает, что при проектировании застройки новых микрорайонов или перепланировки старых целесообразно проводить трехмерное математическое моделирование для сравнения предполагаемых вариантов застройки с точки зрения рассеяния газообразных загрязняющих веществ, выбрасываемых автотранспортом и другими источниками загрязнений, а также уровня комфорта проживания населения [2].

Литература

1. Сервисы платформы UniHUB.—URL: www.unihub.ru.—(дата обращения 10.03.2017).
2. Волик М. В., Каменецкий Е. С., Кусраев А. Г., Орлова Н. С., Хубежты Ш. С. Исследование влияния длины улиц и высоты домов на движение воздуха // Геология и геофизика Юга России.—2016.—№ 4.—С. 31–38.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЛИНЫ УЛИЦЫ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАЗООБРАЗНЫХ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ

М. В. Волик

(Россия, Владикавказ; Финансовый университет, ЮМИ)

Изменение свойств и состава атмосферы загрязняющими веществами оказывает отрицательное воздействие на состояние человека, животных, растений и экосистем. Наибольшая часть антропогенных загрязнений, являющихся результатом человеческой деятельности, поступает в атмосферу от автотранспорта в результате неполного сгорания топлива. В связи с этим еще более актуальное значение приобретает усовершенствование системы экологического мониторинга состояния атмосферного воздуха.

В работе проведено сравнительное исследование влияния длины улицы на распространение и накопление загрязняющих веществ внутри нее. Для решения поставленной задачи использовалось свободно-распространяемое программное обеспечение OpenFoam и удаленный доступ к консоли на управляющем узле вычислительного кластера JSCC RAS Cluster Console (<https://unihub.ru/resources/js3console>) WEB-лаборатории UniHUB [1]. Конфигурация городской застройки представляла собой одиночную улицу с домами разной высоты. Высота домов на наветренной стороне улицы принималась равной 0.5 от высоты домов на подветренной стороне, ширина улицы — одной такой высоте, длина улицы — три или шесть таких высот. В качестве источников газообразных загрязняющих веществ имитировались выбросы автомобилей.

В [2] показано, что в центральной части исследуемых улиц образуется двухвихревая структура, а ближе к краям — одновихревые структуры. В менее длинной улице переход от одновихревой структуры к двухвихревой происходит на расстоянии от края улицы, равном $1/5$ ее длины, а в более длинной — на расстоянии $1/10$ ее длины. Результаты расчетов показали, что через 50 секунд после активизации источников газообразных загрязняющих веществ, расположенных на проезжей части улицы, на расстоянии 2 м от края в обоих вариантах конфигурации улиц концентрация загрязняющих веществ совпадает, а ее максимальное значение наблюдается на подветренной стороне улиц. По мере удаления от края улицы внутрь ее в области перехода от одновихревой структуры к двухвихревой концентрация загрязняющих веществ также одинакова, но максимальные значения наблюдаются на наветренной стороне. В центре обеих улиц максимальные значения концентрации загрязняющих веществ сохраняются на наветренной стороне. Однако в центральном сечении менее длинной улицы наблюдается большее количество газообразных загрязняющих веществ на наветренной стороне и меньшее — на подветренной стороне по сравнению с более длинной улицей. Кроме того, на краю обеих улиц максимальные значения концентрации загрязняющих веществ выше, чем внутри улиц.

Полученные результаты расчетов показали значительное влияние длины улицы рассмотренной конфигурации не только на картину течения внутри нее, но и на распространение газообразных загрязняющих веществ, выделяемых автотранспортом. Однако, для уточнения полученных результатов необходимо исследовать более длительный по времени выброс источниками загрязнений.

Литература

1. Сервисы платформы UniHUB.—URL: www.unihub.ru.—(дата обращения 10.05.2017).
2. Волк М. В. Исследование влияния длины улицы с домами разной высоты на картину течения воздуха в ней // Материалы Междунар. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и автоматизации» и XIV Шк. молод. учен. «Нелокальные краевые задачи и современные проблемы анализа и информатики».—Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2016.—С. 83–84.

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ СПИРАЛЬНЫЕ МОДЫ В КРОВЕНОСНОМ СОСУДЕ

В. А. Гетман

(Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ)

Впервые длинные продольные волны были рассчитаны по линейной теории в цилиндре, ограниченном упругой оболочкой. В дальнейшем появился вопрос расчета спиральных движений в сосудах.

В докладе построены асимптотические разложения квазистационарных мод на основе нелинейных уравнений Навье — Стокса. Главное приближение удовлетворяет краевой задаче для линейризованного дифференциального уравнения в частных производных, коэффициенты которого зависят от продольной и радиальной компонент скорости длинных волн. Решение в главном приближении найдено численно. Получена оценка вклада в решение от функций, описывающих пограничные слои. Показано, что в главном приближении нулевая квазистационарная мода не зависит от времени и не изменяет направление вращения жидкости в сосуде.

Кроме спиральных волн в сосуде имеются квазистационарные спиральные моды, которые в первом приближении не зависят времени. Отметим, что первая квазистационарная мода не изменяет направления вращения жидкости.

О ЗАКОНЕ РАСШИРЕНИЯ ОБЛАКА ВЗРЫВА

М. С. Гетманский (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),

А. И. Снопов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Предложена модель, позволяющая получить информацию о поведении среды во внутренней части облака взрыва. Модель точечного взрыва, моделирующая очаг взрыва точкой, общепринятая для исследования динамики такого явления, по своему существу не дает возможности получать сведения о состоянии газа внутри облака взрыва, так как его наличие в этой модели проигнорировано. Она позволяет изучать кинетику и термодинамику только среды, окружающей облако взрыва.

В докладе представлены результаты расчетов кинематики и термодинамики процессов, происходящих в облаках взрыва, с использованием точных частных решений уравнений движения вязкого газа. Произведено сравнение с моделью точечного взрыва, минус которой заключается в том, что происходящее в начальный момент времени не исследовано. Определены произвольные параметры решения, характеризующие происходящие термодинамические процессы в исследуемой области. Также произведена оценка температуры, давления и плотности. При исследовании взрыва рассматривается расширяющееся облако, образованное, в основном, парами железа. Исходными данными послужили фотографии известного эксперимента, на которых запечатлен последовательный рост радиуса облака взрыва в определенные моменты времени. Допускается, что облако взрыва имеет шаровую форму и сферическую симметрию.

Данная модель предоставляет не только картину расширения облака взрыва, а также еще и информацию о внутреннем состоянии среды, в отличие от теории точечного взрыва, которая не дает возможности рассмотреть происходящие внутри процессы.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ КЛИНА В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ¹

Н. Ф. Димитриева

(Украина, Киев; ИГМ НАНУ)

В настоящей работе изучаются механизмы формирования, развития, распада волновых и вихревых компонент течений в стратифицированной среде, где волны и вихри существуют одновременно и активно взаимодействуют между собой. Сложность подхода — внутренняя многомасштабность, отражающая присутствие крупных компонент течений (вихри, внутренние волны в толще жидкости) и тонких высокоградиентных прослоек, разделяющих структурно отличающиеся области течения.

Решается нестационарная плоская задача обтекания горизонтального клина длиной $L = 10$ см и шириной $h = 2$ см потоком устойчиво стратифицированной жидкости с периодом плавучести $T_b = 6.3$ с. В качестве математической модели изучаемых физических процессов выбрана фундаментальная система дифференциальных балансных уравнений механики неоднородных многокомпонентных жидкостей в приближении Буссинеска, когда малые изменения плотности на масштабах задачи учитывается только в членах с силой тяжести [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_{00}} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} - \mathbf{s} \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s = \kappa_S \Delta s + \frac{v_y}{\Lambda}, \quad \rho = \rho_{00} \left(\exp \left(-\frac{y}{\Lambda} \right) + s \right),$$

с граничными условиями

$$v_x|_{x,y \rightarrow \infty} = U, \quad v_y|_{x,y \rightarrow \infty} = 0, \quad s|_{x,y \rightarrow \infty} = 0, \quad \mathbf{v}|_{\Sigma} = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Sigma} = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Sigma} + \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} = 0,$$

где $S = S_0(y) + s$ — полная соленость, s — ее возмущенная составляющая, $\rho_{00} = 1020$ кг/м³ — плотность на нулевом уровне, $\rho(y)$ — невозмущенное распределение плотности, которое задается профилем солености $S_0(y)$, \mathbf{v} — вектор скорости жидкости, U — скорость обтекания клина, P — давление, ν — коэффициент кинематической вязкости, κ_S — коэффициент диффузии соли, t — время, g — ускорение свободного падения, ∇ и Δ — операторы Гамильтона и Лапласа, $\Lambda = (d \ln \rho / dy)^{-1}$ — длина плавучести, $N = \sqrt{g/\Lambda} = 1$ с⁻¹ — частота плавучести, \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности тела Σ . Установившиеся поля физических

¹Работа выполнена с использованием сервисов платформы UniHUB (www.unihub.ru).

переменных течения, индуцированные диффузией на неподвижном клине, служат начальными условиями для задачи обтекания тела потоком непрерывно стратифицированной жидкости [2, 3].

Численное решение поставленных задач было реализовано с помощью свободно распространяемого пакета OpenFOAM, открытость исходного кода которого позволила построить оригинальный решатель, реализующий систему уравнений методом конечных объемов [4]. Вычисления проводились в параллельном режиме с привлечением сервисов платформы UniHUB.

Сложную структуру стратифицированных течений иллюстрирует поле горизонтальной компоненты градиента возмущения солености (рис. 1).

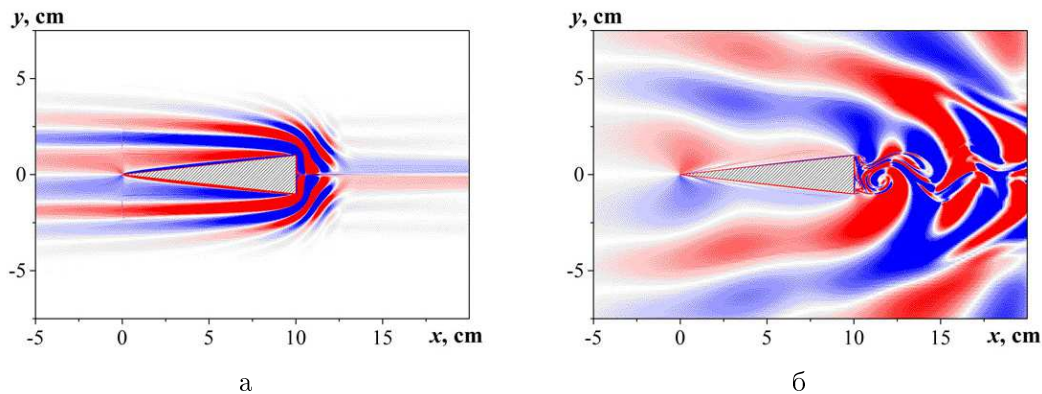


Рис. 1. Горизонтальная компонента градиента возмущения солености $\partial s/\partial x$ при обтекании клина со скоростью $U = 10^{-3}$ м/с (а) и $U = 10^{-2}$ м/с (б), $t = 16T_b$. Красный цвет — положительные значения, синий — отрицательные.

Полученные результаты представляют важность для фундаментальной и прикладной аэро- и гидродинамики, поскольку дают более глубокое понимание физических процессов в стратифицированных средах, благодаря применению в численном моделировании фундаментальной системы уравнений механики неоднородных жидкостей, учитывающей влияние реальных свойств среды и внешних динамических факторов.

Литература

1. *Димитриева Н. Ф.* Моделирование течений устойчиво стратифицированных жидкостей // *Мат. форум.* Т. 10, ч. 2. Исслед. по мат. анализу, диф. уравнениям и их прилож.—2016.—С. 115–124.—(Итоги науки. Юг России).
2. *Dimitrieva N. F., Zagumennyi Ia. V.* Diffusion-driven flows on a wedge-shaped obstacle // *Physica Scripta.*—2016.—Vol. 91, № 8.—P. 084002 (1–8).
3. *Димитриева Н. Ф., Чашечкин Ю. Д.* Структура индуцированных диффузией течений на клине с искривленными гранями // *Морской гидрофиз. журн.*—2016.—№ 3.—С. 77–86.
4. *Димитриева Н. Ф.* Численное решение задачи обтекания клина потоком стратифицированной жидкости с использованием OpenFOAM // *Тр. Ин-та систем. программирования РАН.*—2017.—Т. 29, № 1.—С. 7–20.

О КОЛЕБАНИЯХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМИ
НАПРЯЖЕНИЯМИ¹

В. В. Дударев (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ),
Р. М. Мнухин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В настоящее время с развитием технологий производства все большее внимание уделяется исследованию функционально-градиентных пьезоматериалов (ФГП). Элементы, изготовленные из таких материалов, обладают рядом преимуществ по сравнению с однородными или слоистыми объектами. Неоднородные свойства позволяют расширять область применения ФГП в современных устройствах. При этом одним из основных направлений использования являются пьезоактуаторы, с помощью которых можно создавать различные режимы колебаний путем подачи определенного электрического сигнала. Учитывая сложность производства и режимы эксплуатации таких изделий, в них могут возникать предварительные (остаточные) напряжения и деформации.

В работе на основе общей постановки о движении электроупругих тел при наличии предварительного напряженно-деформированного состояния (ПНДС), описанной в работе [1], сформулированы задачи об установившихся колебаниях стержня и диска, выполненных из ФГП. Продольные колебания стержня вызываются путем приложения периодической силы на правом конце, левый конец жестко закреплен. Модуль Юнга является переменным $E = E(x)$, ПНДС соответствует одноосному растяжению в начальной конфигурации. Решение прямой задачи об определении функции смещения получено численно с помощью метода пристрелки. Построены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) для различных законов $E(x)$ и уровня ПНДС. Наибольшее изменение АЧХ наблюдается вблизи резонансов.

Во второй задаче для тонкого полого диска из ФГП при наличии неоднородного ПНДС колебания вызываются путем подачи разности потенциалов на электродированные торцевые поверхности. Уравнения колебаний сформулированы в рамках обобщенного плоского напряженного состояния. Получено дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами относительно функции смещения, решение которого реализовано численно. Проведен анализ изменения АЧХ и первых двух резонансных частот при различных законах изменения свойств материала с учетом ПНДС.

На основе решений рассмотренных задач предложен способ реконструкции уровня преднапряжений в стержне и диске из ФГП по данным об изменении значений частот свободных колебаний с использованием техники, описанной в [2].

Литература

1. Kuang Z. B. Theory of Electroelasticity.—N. Y.: Springer, 2014.—431 p.
2. Dudarev V. V., Mnukhin R. M., Vatulyan A. O. Vibration of a prestressed tube in the presence of plastic zone // J. of Sound and Vibration.—2016.—Vol. 375.—P. 92–101.

¹Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации, проект № МК-3179.2017.1, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00354.

ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БИФУРКАЦИЙ В СИСТЕМЕ РЭЛЕЯ С ДИФФУЗИЕЙ

А. В. Казарников

(Россия, Владикавказ, ЮМИ; Ростов-на-Дону, ЮФУ)

Рассматривается система Рэля с диффузией в одномерном случае, когда пространственная переменная меняется на интервале $x \in (0, 1)$, а время — на вещественной прямой $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}v_t &= \nu v_{xx} + w, \\w_t &= \nu w_{xx} - v + \mu w - w^3,\end{aligned}\tag{1}$$

где $v = v(x, t)$, $w = w(x, t)$ — неизвестные функции, $\mu \in \mathbb{R}$ — управляющий параметр, $\nu > 0$ — фиксированный коэффициент диффузии. Данная система является частным случаем системы Фитцхью — Нагумо [1], которая моделирует распространение нервного импульса.

При $\nu = 0$ приходим к классической системе обыкновенных дифференциальных уравнений Рэля

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + \mu y_2 - y_2^3.\end{aligned}\tag{2}$$

Известно, что если на границе отрезка задать однородные краевые условия Неймана

$$v_x(0, t) = 0, \quad w_x(0, t) = 0,\tag{3}$$

то при критическом значении параметра $\mu_{cr} = 0$ в системе (1) происходит рождение пространственно-однородного автоколебательного режима, а именно, цикла классической системы Рэля без диффузии (2).

В настоящей работе показано существование критических значений параметра μ , при которых возникают пространственно-неоднородные автоколебательные и стационарные режимы, устойчивые относительно возмущений, принадлежащих некоторым бесконечномерным инвариантным подпространствам системы H_k . Попутно получен общий член асимптотики цикла классической системы Рэля и исследованы его свойства.

Эволюция вторичных решений при увеличении параметра μ была исследована численно. Для интегрирования системы применен метод Галеркина, что позволило сохранить свойства инвариантности на подпространствах H_k у дискретизации бесконечномерной задачи. Было обнаружено, что при увеличении значений параметра надкритичности вторичные автоколебательные режимы постепенно сменяются стационарными профилями. При дальнейшем увеличении значений μ данные решения сменяются режимом квадратной волны (square wave pattern).

Краевые условия Дирихле и смешанные краевые условия рассматривались в [2, 3]. Для получения вторичных решений применен метод Ляпунова — Шмидта в форме, развитой В. И. Юдовичем [4]. Метод применим к дифференциальным уравнениям, заданным как в конечномерных, так и бесконечномерных пространствах, в том числе к уравнениям Навье — Стокса [5].

Выводы работы остаются справедливыми, если рассмотреть систему Рэлея с различными коэффициентами диффузии: ν_1 в первом уравнении и ν_2 во втором, при условии, что $0 < \nu_1 < \nu_2$.

Литература

1. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophys. J.*—1961.—Vol. 1, № 6.—P. 445–466.
2. *Казарников А. В., Ревина С. В.* Возникновение автоколебаний в системе Рэлея с диффузией // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование.*—2016.—Т. 9.—№ 2.—С. 16–28.
3. *Казарников А. В., Ревина С. В.* Асимптотика стационарных решений системы Рэлея с диффузией // *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Сер. Естеств. науки.*—2016.—№ 3 (191).—С. 13–19.
4. *Юдович В. И.* Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // *Прикл. математика и механика.*—1972.—Т. 36.—№ 3.—С. 450–459.
5. *Ревина С. В.* К задаче устойчивости сдвиговых течений относительно длинноволновых возмущений // *Владикавк. мат. журн.*—2016.—Т. 18, Вып. 4.—С. 50–60.

ДЛИННОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

О. В. Кириченко

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассматривается $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ — движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, периодического по пространственным переменным x_1 и x_2 с периодами L_1 и L_2 соответственно. Период L_1 предполагается равным 2π , а отношение периодов характеризуется волновым числом $\alpha \ll 1$: $L_2 = 2\pi/\alpha$, $\alpha \rightarrow 0$.

Выполняются условия периодичности поля скорости \mathbf{v} по переменным x_1 и x_2 .

Поле скорости \mathbf{v} и давление p удовлетворяют системе уравнений Навье — Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

где ν — безразмерная вязкость.

Строится длинноволновая асимптотика задачи устойчивости стационарного течения, когда основное поле скорости принадлежит классу течений специального вида

$$\mathbf{V} = (\alpha V_1(x_2), V_2(x_1)). \quad (3)$$

Предполагается, что среднее скорости основного течения вдоль длинного периода не равно нулю $\langle V_2 \rangle \neq 0$.

Целью работы является обобщение известных результатов для двумерных сдвиговых течений ($\mathbf{V} = (0, V_2(x_1))$) — выражение первых членов асимптотики линейной спектральной задачи с помощью тех же операторов и функций, которые возникли при рассмотрении параллельных течений.

Найдены выражения первых членов асимптотики по малому параметру α собственных значений и собственных функций, получена связь между ними. В частном случае, когда $V_1(x_2)$ является нечетной функцией, показано, что коэффициенты разложения по α собственных значений отличны от нуля лишь для нечетных степеней, а коэффициенты разложения критического значения вязкости отличны от нуля для четных степеней — так же, как в случае сдвигового течения. Приведено сравнение со случаем сдвигового течения. Дана предварительная визуализация отвечающих автоколебаний.

Литература

1. Мелехов А. П., Ревина С. В. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических двумерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. Механика жидкости и газа.—2008.—№ 2.—С. 41–56.
2. Ревина С. В. Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2013.—Т. 53, № 8.—С. 1387–1401.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЙНШТЕЙНОВО-ПОДОБНЫХ
ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
МЕТОДОВ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ¹

П. Н. Клепиков (Россия, Барнаул; АлтГУ),
Е. Д. Родионов (Россия, Барнаул; АлтГУ)

В последнее время активно изучаются различные обобщения многообразий Эйнштейна, например, эйнштейново-подобные (псевдо) римановы многообразия в смысле А. Грея [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (Псевдо) риманово многообразие принадлежит к классу A , если тензор Риччи является циклично параллельным, т. е.

$$(\nabla_X r)(Y, Z) + (\nabla_Y r)(Z, X) + (\nabla_Z r)(X, Y) = 0$$

для любых векторных полей X, Y и Z .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (Псевдо) риманово многообразие принадлежит к классу B , если тензор Риччи является тензором Кодацци, т. е.

$$(\nabla_X r)(Y, Z) = (\nabla_Y r)(X, Z)$$

для любых векторных полей X, Y и Z .

Многообразия, принадлежащие классам A и B , являются эйнштейново-подобными (псевдо) римановыми многообразиями по А. Грею [1].

В данной работе, с использованием систем компьютерной математики, изучаются однородные (псевдо) римановы многообразия с инвариантной эйнштейново-подобной метрикой, что продолжает предыдущие исследования авторов [2].

Литература

1. Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein // *Geom. Dedicata*.—1978.—Vol. 7.—P. 259–280.
2. Клепиков П. Н. Левоинвариантные псевдоримановы метрики на четырехмерных группах Ли с нулевым тензором Схоутена — Вейля // *Изв. вузов. Математика*.—2017.—№ 8.—С. 92–97.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00336А.

ПРИМЕНЕНИЕ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ 4-МЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ¹

С. В. Клепикова (Россия, Барнаул; АлтГУ),
О. П. Хромова (Россия, Барнаул; АлтГУ)

Изучение различных свойств инвариантных тензорных полей представляет интерес в понимании геометрического и топологического строения однородного (псевдо) риманова многообразия. В общем случае эта задача достаточно сложна. Поэтому приходится накладывать ограничения на класс рассматриваемых многообразий и/или их размерность. Если размерность многообразия достаточно мала, то представляется возможным применение систем символьных вычислений.

Настоящая работа продолжает исследования авторов относительно применения универсальных математических пакетов в исследовании однородных (псевдо) римановых пространств [1–4]. Разработаны математические и компьютерные модели для определения компонент различных тензоров кривизны (например, тензоров Римана, Риччи, Вейля, Схоутена — Вейля и пр.) однородных (псевдо) римановых многообразий. Данный алгоритм реализован в среде пакета Maple. С его помощью возможно получить классификацию многообразий, удовлетворяющих некоторым ограничениям на тензор кривизны (например, с изотропными тензорами Римана, Риччи или Вейля), или определить собственные значения различных операторов кривизны: кривизны Риччи, одномерной или секционной кривизны.

Литература

1. *Гладунова О. П.* Применение математических пакетов к вычислению инвариантных тензорных полей на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо) римановой метрикой // *Вестн. Барнаул. гос. пед. ун-та. Сер. Естесв. и точн. науки.*—2006.—№ 6.—С. 111–115.
2. *Гладунова О. П., Оскорбин Д. Н.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // *Изв. Алт. гос. ун-та.*—2013.—№ 1/1.—С. 19–23.
3. *Клепикова С. В., Родионов Е. Д., Хромова О. П.* Об операторах кривизны метрических групп Ли // *Изв. Алт. гос. ун-та.*—2016.—№ 1 (89).—С. 129–137.
4. *Хромова О. П.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях // *Изв. Алт. гос. ун-та.*—2017.—№ 1 (93).—С. 140–143.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00336А.

МОДЕЛИ ГОМОГЕНИЗАЦИИ СМЕСЕВЫХ КОМПОЗИТОВ
С ПОГРАНИЧНЫМИ СВОЙСТВАМИ В МЕЖФАЗНЫХ ЗОНАХ¹

А. С. Корниевский (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
А. В. Наседкин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
А. А. Наседкина (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

При создании смесевых композитов часто получают неоднородные структуры с неплотно прилегающими друг к другу составляющими материалов различных фаз. Например, при спекании пьезокерамических порошков с более плотными гранулами получается смесевой композит из пьезокерамики и упругих включений, причем на межфазных границах могут существовать воздушные прослойки. Также для многофазных смесевых композитов в процессе их эксплуатации возможны отслоения материалов различных фаз. В этих и других случаях представляет интерес рассмотрение композитных структур с неидеальными условиями контакта на межфазных границах [1].

В популярных в последнее время моделях наномеханики с поверхностными эффектами для композитов с наноразмерными неоднородностями на межфазных границах рассматриваются граничные условия с поверхностными напряжениями.

Во всех этих случаях для определения эффективных модулей, т. е. решения задач гомогенизации, можно применить общий подход, базирующийся на применении метода эффективных модулей (с модификациями, связанными с учетом дополнительных факторов на межфазных границах), моделировании представительных объемов и метода конечных элементов для численного решения задач гомогенизации [2, 3].

В качестве примера рассмотрим смесевой двухфазный композит с наноразмерными включениями. Обозначим через Ω — представительный объем; $\Omega^{(1)}$ — объем, занимаемый основным материалом (матрицей); $\Omega^{(2)}$ — совокупность объемов, занимаемых материалом второй фазы (включениями); $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$; Γ — внешняя граница объема; Γ^s — совокупность пограничных поверхностей материалов с различными фазами; \mathbf{n} — вектор единичной нормали к границе, внешней по отношению к $\Omega^{(1)}$; \mathbf{x} — радиус-вектор точки в декартовой системе координат. Будем считать, что объемы $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ заполнены различными анизотропными упругими материалами. Тогда в рамках классической статической линейной теории упругости имеем следующую систему определяющих уравнений в Ω :

$$\mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \mathbf{T} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\mathbf{L}^*(\nabla) = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $\mathbf{T} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}$ — массив компонент тензора напряжений σ_{ij} ; $\mathbf{S} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}\}$ — массив компонент тензора деформаций ε_{ij} ;

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00785.

\mathbf{u} — вектор-функция перемещений; \mathbf{c} — 6×6 матрица упругих жесткостей; $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(j)}$, $\mathbf{c} = \mathbf{c}^{(j)}$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(j)}$ при $\mathbf{x} \in \Omega^{(j)}$; $(\dots)^*$ — операция транспонирования.

На внешней границе $\Gamma = \partial\Omega$ представительного объема примем условия

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3)$$

где \mathbf{S}_0 — массив размерности 6, состоящий из постоянных значений.

В соответствие с моделью Гуртина — Мурдоха примем, что на наноразмерных границах раздела фаз Γ^s выполняется условие

$$\mathbf{L}^*(\mathbf{n}) \cdot [\mathbf{T}] = \mathbf{L}^*(\nabla^s) \cdot \mathbf{T}^s, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^s, \quad (4)$$

где $[\mathbf{T}] = \mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}^{(2)}$ — скачок напряжений через границу раздела фаз; ∇^s — поверхностный набла-оператор; r — координата, отсчитываемая по нормали к Γ^s , $\mathbf{T}^s = \{\sigma_{11}^s, \sigma_{22}^s, \sigma_{33}^s, \sigma_{23}^s, \sigma_{13}^s, \sigma_{12}^s\}$ — массив, состоящий из компонент тензора поверхностных напряжений σ_{ij}^s . Для поверхностных напряжений примем «поверхностный» закон Гука:

$$\mathbf{T}^s = \mathbf{c}^s \cdot \mathbf{S}^s, \quad \mathbf{S}^s = \mathbf{L}(\nabla^s) \cdot \mathbf{u}^s, \quad \mathbf{u}^s = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{nn}^*, \quad (5)$$

где \mathbf{c}^s — матрица поверхностных модулей упругих жесткостей размером 6×6 ; \mathbf{I} — единичная матрица размером 3×3 .

Для определения эффективных модулей примем, что для однородной среды сравнения выполняются соотношения $\mathbf{c}^{\text{eff}} \cdot \mathbf{S}_0 = \langle \mathbf{T} \rangle$, где \mathbf{S}_0 — заданные значения из (3). Тогда, предполагая для среды сравнения анизотропию общего вида, полный набор эффективных жесткостей $c_{\alpha\zeta}^{\text{eff}}$ можно определить из решения задач (1)–(5) при $\mathbf{S}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{h}_\zeta$, $\varepsilon_0 = \text{const}$, где ζ — некоторый фиксированный индекс (\mathbf{h}_ζ — вектор из шестимерного базиса для компонент тензора деформаций; $\mathbf{h}_j = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, 3$; $\mathbf{h}_4 = (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2)/2$; $\mathbf{h}_5 = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1)/2$; $\mathbf{h}_6 = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)/2$; \mathbf{e}_j — орты декартовой системы координат):

$$c_{\alpha\zeta}^{\text{eff}} = \frac{\langle T_\alpha \rangle}{\varepsilon_0}, \quad \langle (\dots) \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} (\dots) d\Omega + \int_{\Gamma^s} (\dots)^s d\Gamma \right). \quad (6)$$

Как видно, для наноструктурированных композитов учет поверхностных эффектов приводит к появлению специальных граничных условий (4), (5) на поверхности Γ^s и к необходимости вычисления осредненных напряжений в (6) не только по объему Ω , но и по поверхности Γ^s . Аналогичным образом можно рассмотреть задачу гомогенизации для композитов с неидельными контактами на Γ^s , например, при интерфейсных условиях пружинного типа [1].

Литература

1. Baik J. M., Thompson R. B. Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: a quasi-static model // J. Nondestructive Evaluation.—1984.—Vol. 4.—P. 177–196.
2. Nasedkin A. V., Kornievsky A. S. Finite element modeling and computer design of anisotropic elastic porous composites with surface // Wave Dynamics and Mechanics of Composites for Analysis of Microstructured Materials and Metamaterials. Ser. Advanced Structured Materials / Ed. M. A. Sumbatyan.—2017.—Vol. 59.—P. 107–122.
3. Nasedkin A. V., Nasedkina A. A., Kornievsky A. S. Modeling of nanostructured porous thermoelastic composites with surface effects // AIP Conf. Proc.—2017.—Vol. 1798.—P. 020110.

РАБОТА СОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ В АНИЗОТРОПНОМ
НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ ГРУНТА С КВАДРАТИЧНЫМ ЗАКОНОМ
ИЗМЕНЕНИЯ ПРОВОДИМОСТИ

Д. Г. Лекомцев

(Россия, Орел; ОГУ)

Как показывают экспериментальные данные, реальные нефтеносные (водоносные) пласты демонстрируют анизотропию [1] и неоднородность своих свойств. В таких условиях становится актуальной разработка моделей работы эксплуатационной скважины в анизотропном неоднородном слое грунта. Совершенная эксплуатационная скважина дебита Q расположена в горизонтальном пласте постоянной толщины. Грунт пласта, недеформируемый анизотропный и неоднородный, характеризуется коэффициентом проницаемости K — тензором второго ранга (вообще говоря, несимметричным). Контур скважины — окружность $\sigma_C: x^2 + y^2 = R_C^2$, радиуса R_C , пласт не ограничен по простиранию.

Полагаем, что жидкость несжимаемая и ее течение стационарное. Обобщенный потенциал $\varphi(z) = -(p + \rho\Pi)/\mu$ (Π — потенциал массовой силы — силы тяжести, p — давление, μ и ρ — вязкость и плотность жидкости) и скорость фильтрации \vec{v} течения как функции координат точки на физической плоскости $z = x + iy$) удовлетворяют всюду в области течения D (за исключением изолированных особых точек $\varphi(z)$) уравнению [2]

$$\nabla \cdot (K \cdot \varphi(z)) = 0, \quad z \in D. \quad (1)$$

Уравнение (1) относится к эллиптическому типу, при условии, что его коэффициенты K_{ij} , $i, j = 1, 2$ удовлетворяют соотношениям $K_{11} > 0$ ($K_{22} > 0$), $D(K_S) = K_{11}K_{22} - (K_{12} + K_{21})^2/4$. Здесь $D(K_S)$ — определитель симметричной части $K_S = (K + K^T)/2$ тензора K ($K^T = (K_{ji})$ — транспонированный тензор). Уравнение (1) записано в безразмерных величинах [2]. Полагаем, что давления на контуре скважины σ_C и контуре питания постоянные, разность давлений равна единице [3, 4]. Трудность решения поставленной задачи обусловлена сложным видом уравнения (1). Решение значительно упрощается, если перейти на вспомогательную плоскость $\eta = \xi + i\eta$, используя гомеоморфные (аффинные) преобразования координат (прямое и обратное) [2, 5, 6].

Рассмотрим слой проводимостью $P' = \eta^2$ на вспомогательной плоскости η . Положим, что толщина слоя постоянна, а проницаемость изменяется по закону $K_{ij} = \eta^2 k_{ij}/k_0$, $i, j = 1, 2$ (k_0 и k_{ij} — постоянные, $k_0 = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}$). Данный слой имеет сингулярную линию $\eta = 0$. Из полученных аналитических соотношений можно, как частный случай, получить формулы, описывающие работу совершенной скважины в анизотропном однородном слое грунта [7–9]. Анизотропия грунта может сильно сказываться на дебите Q (может его увеличивать

или уменьшать по отношению к дебиту в случае изотропной неоднородной среды Q_0). С увеличением отношения недиагональных к диагональным компонентам тензора (K_{ij}) (увеличение коэффициента α , коэффициент β фиксирован) влияние анизотропии уменьшается. Решение данной задачи может оказаться актуальным, использоваться в качестве тестовой при проверке математических моделей, описывающих более сложные задачи [10–11].

Литература

1. *Дмитриев Н. М., Максимов В. М., Дмитриев М. Н., Кузьмичев А. Н., Мурадов А. В., Кравченко М. Н.* Двухфазная фильтрация в анизотропных средах. Теория и эксперимент // XI Всерос. съезд по фундам. проблемам теорет. и прикл. механики: сб. тр.—Казань: Изд-во Казан. (Приволж.) фед. ун-та, 2015.—С. 1201–1203.
2. *Пивень В. Ф.* Математические модели фильтрации жидкости.—Орел: Изд-во Орлов. гос. ун-та, 2015.—С. 408.
3. *Лекомцев Д. Г.* Работа совершенной скважины в ортотропном кусочно-однородном пласте грунта // Моделирование и наукоемкие информационные технологии в технических и социально-экономических системах.—Новокузнецк: Изд-во Сиб. гос. индустр. ун-та, 2016.—С. 240–245.
4. *Лекомцев Д. Г.* Работа совершенной скважины в анизотропном кусочно-однородном пласте грунта // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование: тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016.—С. 162–163.
5. *Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г.* Исследование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Учен. зап. Орлов. гос. ун-та.—2014.—Т. 59, № 3.—С. 83–88.
6. *Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г.* Аналитическое и численное моделирование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Вычисл. мех. сплошных сред.—2016.—Т. 9, № 4.—С. 389–399.
7. *Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г.* Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Учен. зап. Орлов. гос. ун-та.—2012.—Т. 47, № 3.—С. 69–74.
8. *Лекомцев Д. Г.* Математическое моделирование работы батарей совершенных скважин в анизотропном грунте // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика-математика.—2015.—№ 1.—С. 94–102.
9. *Лекомцев Д. Г.* Работа совершенной скважины, вблизи прямолинейной непроницаемой границы, в анизотропной пористой среде // Современ. методы прикл. математики, теор. управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016).—Воронеж: Научная книга, 2016.—С. 207–209.
10. *Крыштопин Д. В.* Математическое моделирование трехмерной эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в анизотропной пористой среде // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. XII Междунар. науч. конф. (с. Цей, 12–18 июля 2015 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2015.—С. 199–200.
11. *Крыштопин Д. В., Федяев Ю. С.* Исследование эволюции трехмерной границы раздела «разноцветных» жидкостей к скважине в неоднородной ортотропной пористой среде // Учен. зап. Орлов. гос. ун-та.—2015.—Т. 67, № 4.—С. 32–36.

ОБ УСЛОВИЯХ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТЬЮРИНГА ДЛЯ СИСТЕМЫ ШНАКЕНБЕРГА

С. А. Лысенко

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В работе рассматривается система Шнакенберга [1], моделирующая биохимические процессы и относящаяся к классу систем реакции-диффузии:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + a - u + u^2v, \\v_t &= dv_{xx} + b - u^2v.\end{aligned}\tag{1}$$

Система рассматривается на отрезке $[0, l]$, на концах которого выполняются краевые условия Неймана. В системе Шнакенберга функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$ обозначают концентрации двух взаимодействующих химических веществ, $d > 0$ — коэффициент диффузии, a и b — параметры реакции, удовлетворяющие следующим условиям: $a + b > 0$, $b > 0$.

Для системы Шнакенберга, как и для некоторых других систем реакции-диффузии, имеет место явление неустойчивости Тьюринга [2]. Примером этого явления в окружающей природе является окраска морских раковин или шкур животных, когда образуются пространственные структуры определенного типа — пятна, полосы или другие их виды [3–5].

Стационарное состояние системы называется неустойчивым по Тьюрингу, если оно устойчиво по отношению к пространственно-однородным возмущениям (в отсутствие диффузии) и неустойчиво по отношению к пространственно-неоднородным возмущениям (при наличии диффузии).

Для некоторого множества точек на плоскости параметров (a, b) могут выполняться только необходимые, либо еще и достаточные условия неустойчивости Тьюринга. Соответствующие области параметров (a, b) на плоскости называются областями необходимых, либо достаточных условий неустойчивости Тьюринга.

Область необходимых условий неустойчивости Тьюринга с параметрически заданной границей была построена в [3]. В настоящей работе данная область дополнена границей области достаточных условий. Выполнена визуализация областей необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга и их сопоставление. Получены формулы для нахождения критических значений параметра d , а также для нахождения критических волновых чисел при произвольно выбранных значениях параметров a и b .

Критическим значением параметра d называется такое значение, при котором спектр задачи устойчивости лежит в замкнутой левой полуплоскости, причем пересечение с мнимой осью непусто. Если при этом появляется пара комплексно сопряженных собственных значений, то такая потеря устойчивости называется колебательной; если ведущее собственное значение обращается в

ноль, то такая потеря устойчивости называется монотонной. Известно, что если при критическом значении параметра d имеет место неустойчивость Тьюринга, то потеря устойчивости в этом случае — монотонная. При этом от исходного положения равновесия ответвляются вторичные стационарные режимы.

Для отыскания вторичных стационарных решений был применен метод Ляпунова — Шмидта в форме, развитой В. И. Юдовичем. Получены первые члены разложения по малому параметру надкритичности ε вторичных стационарных решений системы для произвольных параметров a и b , а также выведена формула в общем виде при ε^n . Из условия разрешимости для третьей степени разложения решения по степеням малого параметра надкритичности ε получена формула для вычисления коэффициента, знак которого влияет на характер потери устойчивости (мягкая или жесткая). Проведен анализ знака этого коэффициента в зависимости от выбранных значений параметров a и b .

Применению метода Ляпунова — Шмидта к системе Шнакенберга посвящена работа [6], а описанию области достаточных условий неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга — работа [7]. В настоящей работе область, полученная в [7], дополнена границей областей мягкой и жесткой потери устойчивости. Получено, что эта граница на плоскости параметров (a, b) представляет собой прямую линию.

Результаты работы позволяют определить характер потери устойчивости в системе при различных выбранных значениях параметров a и b , а также получить связь между критическим волновым числом задачи и характером потери устойчивости.

Литература

1. Schnakenberg J. Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour // J. Theor. Biol.—1979.—Vol. 81, № 3.—P. 389–400.
2. Turing A. M. The chemical basis of morphogenesis // Phil. Trans. R. Soc. B: Biol. Sci.—1952.—Vol. 237, № 641.—P. 37–72.
3. Murray J. D. Mathematical biology II: Spatial Models and Biomedical Applications.—Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.—P. 71–98.
4. Еленин Г. Г., Куркина Е. С. Диффузионная неустойчивость в трехкомпонентных системах типа реакция-диффузия. Реакция $(\text{NO}+\text{CO})/\text{Pt}(100)$ // Мат. моделирование.—1994.—Т. 6, № 8.—С. 17–32.
5. Борина М. Ю. Диффузионная неустойчивость в трехкомпонентной модели типа реакция-диффузия // Компьютер. исслед. и моделирование.—2011.—Т. 3, № 2.—С. 135–146.
6. Лысенко С. А. Неустойчивость Тьюринга и асимптотика вторичных стационарных решений системы Шнакенберга // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. XII Междунар. науч. конф. (с. Цей 12–18 июля 2015 г.)—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2015.—С. 205–206.
7. Лысенко С. А. Достаточные условия неустойчивости Тьюринга в системе Шнакенберга // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тез. докл. XII Всерос. шк. семинара (пос. Дивноморское, 29 мая – 3 июня 2017 г.)—Ростов н/Д.—Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2017.—С. 86.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ОБВАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ДИСКРЕТНОГО ЭЛЕМЕНТА¹

Д. Г. Минасян (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
Н. С. Орлова (Россия, Владикавказ; ЮМИ, Финансовый университет)

Обвал — это обрушение как отдельных глыб и блоков, так и более крупных объемов твердых и относительно твердых горных пород из обнажений, расположенных на горном склоне или из крутой, почти отвесной верхней части склона, сопровождающееся их скатыванием, опрокидыванием и раскалыванием [1].

Для исследования обвальных процессов применяются различные методы, среди которых важную роль играет математическое и компьютерное моделирование, в особенности для тех случаев, когда реальные наблюдения и создание экспериментальных моделей оказываются весьма затруднительными.

Основное влияние на скорость и характер движения обломков пород оказывает характер склона (как крутизна, так и свойства поверхности). В процессе движения по склону с примерно постоянным углом крутизны скорость движения обломков может значительно увеличиваться, причем этот рост будет зависеть от размеров и формы обломков, от характера склона и особенно от его крутизны. Более крупные или имеющие более округлую форму обломки движутся с большими скоростями и уносятся дальше от мест обрушения, чем обломки мелкие или неправильной формы. Большое влияние также оказывает взаимодействие и соударение друг с другом отдельных глыб в обваливающейся массе, что приводит к снижению скорости движения при массовых обвалах. Скорость движения одиночных обломков обычно больше и они отлетают от места обрушения на большие расстояния.

В настоящее время оценка размеров зон поражения, вызванных обвалами массы горных пород, представляется актуальным научно-практическим исследованием. Этому исследованию посвящено много работ, как экспериментальных, так и теоретических. Но влияние высоты исходного положения обвальных пород на склоне, их массы и крутизны склона на зону поражения остается не изученным до конца.

В данной работе исследуется модель движения обломков горных пород с использованием метода дискретных элементов (МДЭ) (Discrete element method) [2]. Для проведения вычислений использовался свободный открытый программный код LIGGGHTS [3], в котором реализован МДЭ.

В связи с тем, что реальные наблюдения обвалов весьма затруднительны, исследователи очень часто проводят эксперименты в лабораторных условиях. Следует отметить, что в таких экспериментах, как правило, в качестве материала используются одинаковые частицы небольших размеров (до нескольких миллиметров), изготовленные из стекла или пластмассы в форме дисков

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-35-00147.

или сфер [4]. В одном из экспериментов в качестве материала использовались небольшие бруски гравия прямоугольной формы [5]. Поскольку реальные обломки обвальной массы разного размера и имеют неправильную форму, были проведены экспериментальные исследования, в которых в качестве материала использовались частицы доломита неправильной формы размером от 3 до 6 мм. Отметим, что обвальные породы достаточно часто состоят из доломита. Результаты экспериментов позволили провести верификацию модели движения обломков, в основе которой лежит метод дискретных элементов.

Исследовалось движение обвала по склону, сопряженному с горизонтальным участком. Эксперименты были проведены при значениях угла склона от 30 до 53 градусов и разных значениях высоты, на которой в начальный момент располагался материал [6]. Масса частиц доломита была равна 3 кг, 4 кг и 5 кг.

В целом, результаты расчетов удовлетворительно описывают эксперимент. Дальность пробега возрастает практически линейно с увеличением угла склона. При малых значениях угла склона (35 градусов) наблюдается небольшое завышение результатов расчетов по сравнению с экспериментальными данными. В остальных случаях (46 градусов и 53 градуса) расчетные значения несколько ниже экспериментальных. Небольшое расхождение результатов расчетов и экспериментов можно объяснить как недостаточной точностью определения дальности пробега материала и в экспериментах, и при обработке результатов расчетов, так и тем, что при проведении расчетов использовались сферические частицы одного размера. В действительности, в экспериментах частицы доломита имеют неправильную форму, и их размеры варьируются от 3 до 6 мм.

По результатам проведенных исследований можно сделать вывод о том, что модель на основе метода дискретных элементов можно использовать для описания движения обвальных пород и оценки области поражения при обвалах. Увеличение в исследованном диапазоне угла склона и высоты, на которой в начальный момент располагается материал, приводит к пропорциональному увеличению дальности пробега материала.

Литература

1. Ломтадзе В. Д. Инженерная геология. Инженерная геодинамика.—Л.: Недра, 1977.—479 с.
2. Poschel T. Computational Granular Dynamics Models and Algorithms.—Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer, 2005.—322 p.
3. LIGGGHTS Open Source Discrete Element Method Particle Simulation Code.—URL: <http://www.liggghts.com>
4. Calvetti F, Crosta G., Tatarella M. Numerical simulation of dry granular flows: from the reproduction of small-scale experiments to the prediction of rock avalanches // Rivista Italiana di Geotecnica.—2000.—№ 2.—P. 21–28.
5. Manzella I., Labiouse V. Empirical and analytical analyses of laboratory granular flows to investigate rock avalanche propagation // Landslides.—2013.—№ 10.—P. 23–36.
6. Кусраев А. Г., Минасян Д. Г., Орлова Н. С., Пантеев Д. Г., Хубежты Ш. С. Верификация модели обвалов, использующей метод дискретного элемента // Геология и геофизика Юга России.—2016.—№ 4.—С. 83–93.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В УДАРНОМ ИНСТРУМЕНТЕ

И. Д. Музаев

(Россия, Владикавказ; ГФИ ВНЦ РАН, Финансовый университет)

Одним из основных элементов ударного инструмента является призматический стержень, подвергающийся периодически повторяющимся продольным ударам (рис. 1). В момент удара у поверхности соприкосновения происходят сжатия как в ударяющем теле, так и в стержне. Известно, что небольшие сжимающие напряжения при одном ударе возникают у жестко закрепленного конца стержня, и в инженерном деле они вычисляются различными приближенными формулами.

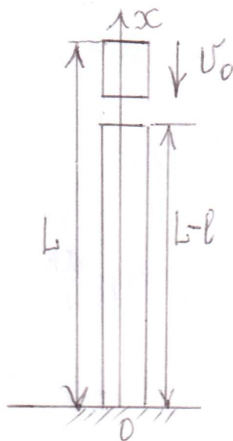


Рис. 1. Расчетная схема начально-краевой задачи.

Все упомянутые инженерные формулы получены в предположении, что ударяющее тело является абсолютно твердым и в него не распространяется упругая волна. Такое упрощающее предположение может обусловить существенную погрешность в максимальных напряжениях.

В представленной ниже механико-математической модели напряженно-деформированного состояния рассматриваемой системы это предположение исключено. Сама механика рассматриваемого процесса моделируется в виде периодически повторяющихся соударений двух призматических стержней, состоящих из одного и того же материала.

Математическую модель продольных упругих колебаний в рассматриваемой системе представляет следующая последовательность контактных начально-краевых задач математической физики:

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U_k}{\partial x^2} = 0,$$

$$\begin{cases} U_1|_{t=0} = 0, & \frac{\partial U_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = -v(x), \\ U_k|_{t=kT} = U_{k+1}|_{t=kT}, & \frac{\partial U_k}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial U_{k+1}}{\partial t} \Big|_{t=kT} - v(x), \\ U_k|_{x=0} = 0, & \frac{\partial U_k}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \\ v(x) = \begin{cases} v_0, & \text{при } L-l < x < L, \\ 0, & \text{при } 0 \leq x \leq L-l, \end{cases} \\ k = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

где приняты следующие обозначения: k — порядковый номер очередного удара, T — период повторения ударов, v_0 — скорость удара, l — длина ударяющего стержня, $L-l$ — длина основного стержня, a — скорость распространения упругой волны в стержнях, $U_k(x, t)$ — продольные перемещения в стержне после совершения k -го удара, x — продольная координата, t — время.

Поставленная последовательность контактных начально-краевых задач решена методом отдачи пасов [2].

В результате получена совокупность расчетных формул для вычисления максимальных напряжений и перемещений в стержнях.

Литература

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.—М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959.—439 с.
2. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем.—М.: Наука, 1987.—352 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ДЛЯ АНАЛИЗА ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМ
МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

А. А. Нартикоев

(Россия, Владикавказ; Финансовый университет)

Системы массового обслуживания (СМО) представляют собой системы специфического вида. Основой СМО является определенное число обслуживающих устройств — каналы обслуживания. Роль каналов в реальности могут выполнять приборы, операторы, продавцы, линии связи и пр. Предназначение СМО состоит в обслуживании потока заявок (требований), представляющих последовательность событий, поступающих нерегулярно и в заранее неизвестные и случайные моменты времени. Само обслуживание заявок также имеет непостоянный характер, происходит в случайные промежутки времени и зависит от многих и даже неизвестных причин. Случайный характер потока заявок и времени их обслуживания обуславливает неравномерность загрузки СМО: на входе могут накапливаться необслуженные заявки (перегрузка СМО), либо заявок нет или их меньше, чем свободных каналов (недогрузка СМО).

Цель моделирования СМО состоит в том, чтобы рассчитать показатели эффективности системы через ее характеристики. В качестве показателей эффективности СМО используются: абсолютная пропускная способность системы (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени); относительная пропускная способность (средняя доля поступивших заявок, обслуживаемых системой); вероятность отказа (заявка покинет СМО не обслуженной); среднее число занятых каналов; среднее число заявок в СМО; среднее время пребывания заявки в системе; среднее число заявок в очереди; среднее время пребывания заявки в очереди и т. п.

Для имитационного моделирования СМО используется популярная система GPSS World Student — среда компьютерного моделирования общего назначения, разработанная для профессионалов в области моделирования [1, 2]. Для одноканальной СМО разработана имитационная модель, учитывающая время прихода и время обслуживания клиентов. Получено, что изменение исходных параметров позволит выяснить количество обслуженных клиентов, количество отказов, время обслуживания конкретного количества клиентов. Также результаты имитационного моделирования позволяют сделать вывод о необходимости моделирования и использования многоканальной СМО для повышения качества обслуживания клиентов.

Литература

1. Зайтова Е. З., Волк М. В. Применение информационных технологий в организации самостоятельной работы студентов // Экономика России в условиях глобализации: вызовы и возможности развития. Междунар. науч. конф.—2015.—С. 258–262.
2. Волк М. В., Бердиев Р. Т. Информационные технологии и их место в образовании и бизнесе // Современные информационно-образовательные технологии в интересах социально-экономического развития России. Междунар. заоч. науч.-метод. конф.—2016.—С. 35–40.

ПРИМЕНЕНИЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ВЫРУЧКИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Ю. В. Никонорова

(Россия, Волгодонск; ВИТИ НИЯУ МИФИ)

В работе исследована зависимость выручки от среднегодовой стоимости основных фондов ОАО «Концерн Росэнергоатом» с 2008 года по 2014 год. Составлено уравнение линейной регрессии и рассмотрены критерии ее значимости при помощи компьютерных расчетов. Данные для исследования были взяты с сайта ОАО «Концерн Росэнергоатом», где они находятся в открытом доступе [1].

Диапазон исследования рассматривался за семь лет, начиная с 2008 года по 2014 год. Данные для применения метода наименьших квадратов считывались в программе Excel. Необходимо отметить, что вручную подобные расчеты произвести невозможно, поскольку оперировать приходилось с данными, исчисляемыми в сотнях миллиардов рублей. Для нахождения коэффициентов регрессии была использована система математических пакетов Maple 5R4. В результате исследования была получена линейная функция $y = 86863167.21 + 0.1518904218x$, где x — среднегодовая стоимость основных фондов, y — теоретическое значение выручки.

Следующий этап исследования представлял собой проверку значимости построенной линейной регрессии. В программе Excel также были рассчитаны вспомогательные данные для расчета коэффициентов корреляции, детерминации, эластичности, расчета фактических значений критерия Фишера и критерия Стьюдента. Полученные результаты говорят о том, что найденное уравнение объясняет зависимость между исследуемыми факторами. Значение коэффициента корреляции 0.840, коэффициента детерминации — 0.706, при нижней границе этих показателей 0.7. Средний коэффициент эластичности 0.544. Для оценки значимости модели были использованы критерии Фишера и Стьюдента. Фактическое значение этих критериев оказалось больше табличного при уровне значимости 0.05. Фактическое значение критерия Фишера 12.021 при табличном 6.61; критерия Стьюдента 3.47 при табличном 2.57. Поэтому гипотезу о случайной природе оцениваемых факторов можно отклонить и признать уравнение регрессии статистически значимым. Доверительный интервал для коэффициента при x [0.039; 0.265].

Исследование показало, что линейная зависимость между среднегодовой стоимостью основных средств присутствует, но имеется влияние показателей, не включенных в модель.

Литература

1. Бухгалтерская отчетность ОАО «Концерн Росэнергоатом». — URL: <http://www.rosenergoatom.ru/partners/shareholdersAndInvestors/buh-otchet/>
2. Елисеева И. И., Курышева С. В. Эконометрика. — М.: Финансы и статистика, 2007. — С. 51–72.

СТРУКТУРА ВИБРОКИПАЮЩЕГО СЛОЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЕГО НАЧАЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ¹

Н. С. Орлова

(Россия, Владикавказ; ЮМИ, Финансовый университет)

В предыдущих работах в результате экспериментального исследования виброкипания [1–5] было обнаружено появление волн на поверхности гранулированного материала, а также появление всплесков. Для теоретического исследования таких эффектов необходимо проведение трехмерных вычислительных экспериментов в определенном диапазоне значений амплитуды и частоты колебаний, а также при разных значениях начальной толщины слоя.

Для исследования влияния амплитуды и частоты колебаний на структуру виброкипящего слоя были проведены вычислительные эксперименты в диапазоне значений амплитуды колебаний 1.5–9 мм и частоты колебаний 10–80 Гц при значении начальной толщины слоя 50 и 100 мм. В расчетах рассматривались монодисперсные частицы стекла диаметром 0.3 мм.

Результаты расчетов были получены с использованием решателя `myTwoPhaseEulerFoam` свободно распространяемого пакета для численного моделирования задач механики сплошных сред `OpenFOAM` (`Open source field operation and manipulation CFD ToolBox`) и программы «Университетский кластер» с удаленным доступом к консоли на управляющем узле вычислительного кластера `JSCC web-лаборатории UniHUB` [6]. В решателе реализована двухжидкостная модель на основе континуального подхода (подхода Эйлера) [3–5].

Для классификации режимов виброкипящего слоя с учетом его начальной толщины используется безразмерный параметр $\Lambda = A\omega/(Hg)^{1/2}$, где A — амплитуда колебаний, ω — циклическая частота колебаний, H — начальная толщина слоя, g — ускорение свободного падения [7].

Результаты трехмерного моделирования показали, что при значениях параметра $\Lambda \leq 0.13$ виброоживления не происходит, на поверхности слоя могут наблюдаться круговые структуры. При значениях параметра Λ в диапазоне от 0.14 до 0.76 слой частиц теряет устойчивость, и наблюдается волнообразная поверхность. В некоторых случаях могут наблюдаться отдельные всплески над поверхностью. При значениях параметра примерно от 0.8 до 1.4 наблюдаются явно выраженные всплески над поверхностью материала. С дальнейшим увеличением значения этого параметра (в диапазоне примерно от 1.5 до 3.5), растет высота

¹Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН I.33П «Фундаментальные проблемы математического моделирования. Фундаментальные проблемы факторизационных методов в различных областях. Алгоритмы и математическое обеспечение для вычислительных систем сверхвысокой производительности».

всплесков, и всплески больше напоминают фонтанирующие каналы. При значениях $\Lambda > 4$ слой переходит в другой режим, когда слой частиц значительно уплотняется, зазор между нижней частью слоя и полкой значительно увеличивается, а максимальная высота виброкипящего слоя практически не меняется. Вместо всплесков могут наблюдаться крупные волны (с большей поверхностью образования). Когда параметр $\Lambda \approx 5$ и принимает значения больше 5, что соответствует максимально высоким значениям амплитуды и частоты колебаний, слой становится еще более неустойчивым, может наблюдаться скошенная поверхность слоя, а также отдельные области слоя со скошенной поверхностью.

Следует отметить, что параметр Λ не является универсальным. В приведенной классификации есть исключения. Например, при значении параметра $\Lambda \doteq 1.52$ (что соответствует значению амплитуды 6 мм и значению частоты колебаний 40 Гц) наблюдаются всплески, похожие на фонтанирующие каналы. Но при том же значении параметра наблюдается другой режим, когда амплитуда колебаний равна 3 мм, частота равна 80 Гц. В этом случае вместо фонтанирующих каналов в слое наблюдаются волны на поверхности слоя или всплески малой высоты. Несмотря на подобные исключения, в целом, можно сделать вывод о том, что использование параметра Λ позволяет адекватно провести классификацию режимов виброкипения относительно тонких ($H = 50$ мм) и толстых слоев ($H = 100$ мм).

Литература

1. Орлова Н. С. Сравнение результатов экспериментального исследования виброкипящего слоя с расчетами по гидродинамической модели гранулярного газа // Инж.-физ. журн.—2014.—Т. 87, № 2.—С. 429–435.
2. Орлова Н. С., Качалкина Я. Н. Исследование режимов виброкипящего гранулированного слоя с использованием пакета OpenFOAM // Тр. Ин-та систем. программирования РАН.—2014.—№ 6.—С. 143–154.
3. Каменецкий Е. С., Орлова Н. С., Тагиров А. М., Волик М. В. Трехмерное моделирование виброкипящего слоя с использованием двухжидкостной модели гранулярного газа // Инж.-физ. журн.—2016.—Т. 89, № 6.—С. 1480–1486.
4. Орлова Н. С. Классификация режимов виброкипения // Теория операторов, комплекс. анализ и мат. моделирование: тез. докл. XIII Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 7-14 сентября 2016 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016.—С. 175–176.
5. Орлова Н. С. Динамика относительно толстых слоев в процессе виброкипения // Современные проблемы механики сплошной среды: тез. XVII Междунар. конф. (Ростов-на-Дону, 7-10 ноября 2016 г.).—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2016.—135 с.
6. Консоль на управляющий узел кластера, “JSCC Cluster Console”.—URL: <https://unihub.ru/resources/jssc>.—(дата обращения: 10.03.2017).
7. Goldshtein A., Shapiro M., Moldavsky L., Fichman M. Mechanics of collisional motion of granular materials. Part 2. Wave propagation through vibrofluidized granular layers // J. Fluid Mech.—1995.—Vol. 2.—P. 349–382.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ КОГНИТИВНЫХ КАРТ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. Ф. Оськин (Беларусь, Полоцк; ПГУ),

Д. А. Оськин (Беларусь, Минск; БГЭУ)

Когнитивные карты представляют собой разновидность математических моделей, описывающих проблемные ситуации или сложные слабоструктурированные системы. Впервые термин «когнитивные карты» (Cognitive Maps) предложил Е. Толмен (E. Tolmen) в работе “Cognitive maps in rats and men”, опубликованной в журнале “Psychological Review” в феврале 1948 г.

Р. Аксельрод (R. Axelrod) предложил рассматривать когнитивную карту как ориентированный граф, дугам которого присваиваются знак «плюс» или «минус». В книге “Structure of Decision: the Cognitive Maps of Political Elites” он применил эту модель для построения теории принятия решений в политике и в экономике.

Таким образом, классические знаковые когнитивные карты задаются в виде ориентированного графа и представляют моделируемую систему в виде множества вершин (концептов) и дуг, взвешенных двухуровневыми значениями. Такая когнитивная карта может быть использована для качественной оценки влияния отдельных концептов на устойчивость системы в целом. Выявляя образовавшиеся в карте контуры, анализируя результирующие знаки каждого из контуров и используя теорию обратных связей, можно оценивать устойчивость моделируемой системы.

В 1986 г. Б. Коско (B. Kosko) предложил новый тип когнитивных карт, получивших название «нечеткие когнитивные карты» (Fuzzy Cognitive Maps). Концепты в нечеткой когнитивной карте могут принимать значения из диапазона действительных чисел $[0, 1]$.

Мы предлагаем модифицировать алгоритм построения нечетких когнитивных карт Коско. Наш подход отличается большей формализацией отдельных шагов алгоритма, что, на наш взгляд, позволит повысить точность моделирования, так как в этом случае параметры модели будут в меньшей степени зависеть от субъективного мнения отдельных экспертов.

В докладе подробно рассматриваются все шаги модифицированного алгоритма и приводится пример моделирования.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ АКАДЕМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ДАННЫХ

А. Ф. Оськин (Беларусь, Минск; ПГУ),

Д. А. Оськин (Беларусь, Минск; БГЭУ)

Интеллектуальный анализ образовательных данных (от англ. Educational Data Mining, далее EDM) — совокупность методов и алгоритмов анализа данных, накапливаемых в учебном заведении в процессе его деятельности с целью выявления скрытых, неочевидных, практически полезных и интерпретируемых знаний об учебном процессе и его участниках для поддержки принятия решений.

Источниками данных для EDM становятся базы данных университетских систем управления обучением, результаты промежуточных и итоговых аттестаций по дисциплинам, письменные работы студентов, учебная документация, ведущаяся на кафедрах и в деканатах, демографические данные, результаты опросов и анкетирований, социальные сети и т. д.

Для разных групп пользователей можно сформировать следующие типовые задачи, решаемые средствами EDM.

Для обучающихся. Осознанное формирование индивидуальной образовательной траектории. Правильный выбор факультативных дисциплин и дисциплин по выбору. Профессиональная ориентация и точный выбор сферы будущей профессиональной деятельности.

Для преподавателей. Разделение студентов на кластеры и подбор для каждого кластера оптимальной технологии и наиболее эффективных методов обучения. Оптимизация структуры и содержания лекционного курса. Прогнозирование успешности учебной деятельности.

Для исследователей. Разработка методов объективной оценки эффективности и результативности учебного процесса. Разработка новых технологий и методов обучения. Совершенствование существующих и разработка новых методов и алгоритмов EDM.

Для администраторов. Поддержка принятия научно обоснованных управленческих решений.

В докладе продемонстрированы возможности EDM на примере решения задачи прогнозирования успешности учебной деятельности.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНКУРЕНТНОГО ОТКЛОНЕНИЯ В ТЕМПАХ РАЗВИТИЯ ОРГАНИЗМОВ¹

А. Ю. Переварюха

(Россия, Санкт-Петербург; СПИИРАН)

Моделирование динамики популяций вне состояния равновесной для среды численности остается актуальной задачей. Особые формы внутривидового взаимодействия могут возникать во время всплеск численности насекомых или в прудах с выращиваемой молодью рыб. В первом случае быстрое нарастание конкурентных факторов на ранних стадиях онтогенеза насекомых приведет к окончанию неконтролируемого размножения вредителей, во втором случае может существенно ухудшить жизнестойкость выпускаемых рыб. Согласно полученным из анализа ранее разработанной нами базовой модели выводам [1], в новой модели экстремальной популяционной динамики целесообразно учесть взаимодействие трех факторов.

- I. Регуляцию квадратично зависимой от плотности убыли текущей численности $N(t)$ на ранних стадиях развития рыб и насекомых как фактора лимитированных ресурсов.
- II. Описание влияния на выживаемость скорости размерного развития как фактора нестабильности действия ювенальной смертности на интервале уязвимости $0 < t < T$, зависящей от квадрата численности.
- III. Резкое усиление действия линейной смертности в ограниченных интервалах состояния половозрелой части популяции, отнесенной к «нулевой стадии» формирования репродуктивных пар.

Моделей роста организмов известно несколько, но они не специфичны для условий раннего онтогенеза. Для нарушения симметрии плотностно-размерного взаимодействия воспользуемся сложной зависимостью с двумя экстремумами $v(N)$ для давления численности молодежи в водоеме на темпы ее развития, $v(0) = 0$. Минимум соответствует оптимальным значениям скопления молодежи:

$$v(N) = \frac{N}{z \exp(-bN(Pe^{-\rho N} + 1))}. \quad (1)$$

Упрощенно можно принять $w(t) \sim G/v(N)$, и давление фактора плотности на темпы роста будет усиливаться ограниченно слева и неограниченно справа от пологого минимума $v(N_{\min})$. Описание с представлением об оптимуме развития представляется наилучшим решением. Константный оптимум w_o достаточно

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № № 17-07-00125, 15-07-01230.

условен. Исходное феноменологическое уравнение, предложенное фон Бергаланфи [2], результирующего действие анаболизма и катаболизма:

$$\frac{dW}{dt} = \eta \sqrt[3]{W(t)^\zeta} - kW(t)^\sigma, \quad W(0) = W_0. \quad (2)$$

Часто применяемое решение (2) частного случая: вклад катаболизма линеен $\sigma = 1$, а анаболизм рыб соответствует показателю степени $\zeta = 2$, записывается $W_t = (\eta/k(\eta/k - W_0^{1/3}) \exp(-kt/3))^3$. Задержка в прохождении формирования организма влечет ухудшение его конкурентоспособности, что могло сказываться при массовом выпуске молоди осетровых Каспия. Положим, действие на жизнестойкость поколения оказывает отклонение, которое получается в результате включения масштабированного давления плотности (1) в расширенное уравнение

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\eta}{\xi v(N(t))} \sqrt[3]{w(t)^\zeta} - kw(t)^\sigma, \quad w(0) = w_0, \quad (3)$$

и расчетом из традиционного уравнения Бергаланфи (2), не включающего внешние факторы.

Для насекомых критические факторы в естественной среде проявляются только на пике всплеск численности, но для воспроизводства осетровых рыб необходимо учесть эффект резкого сжатия масштабов воспроизводства по отношению к запасу. Эффект часто следует для популяций крупных рыб вслед за систематическим их переломом и не поддается заблаговременному прогнозированию. Мы предлагаем воспользоваться техникой реализации триггерного функционала в вычислительной модели. Ограниченная Ψ с областью значений $E(\Psi(S)) = [2, 1]$ быстро стремится к единице:

$$\Psi(S) = 1 + \exp(-\kappa S^2), \quad \lim_{S \rightarrow \infty} \Psi(S) = 1, \quad (4)$$

где параметр κ определяет выраженность эффекта сплоченной группы. Чем больше κ , тем уже диапазон проявления эффекта, используется $\kappa < 1$. Если действие эффекта протяженное, то имеет смысл использовать вогнутую форму замедленного убывания эффекта агрегированной группы: $\Psi(S) = 1 + \exp -\kappa \sqrt{S}$, $\kappa \leq 0,5$. Функционал (4) позволит регулировать действие линейной составляющей скорости убыли поколения.

Литература

1. *Переварюха А. Ю.* Коллапс рыбных запасов и его динамическая модель // Вопросы рыболовства.—2016.—Т. 17, № 3.—С. 358-36731.
2. *Bertalanffy L.* Quantitative laws in metabolism and growth // The Quarterly Review Of Biology.—1957.—Vol. 32, № 3.—P. 217-231.

О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПИТАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ВУЛКАНА

А. А. Радионов

(Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Под каждым действующим вулканом, на глубинах порядка пяти или более километров, геофизическими методами регистрируется магматический очаг [1]. Часто это область объемом от нескольких до десятков кубических километров, которая заполнена магматическим расплавом. Под верхним, периферийным очагом, часто находится другой магматический очаг или система таких очагов. Все вместе они называются питающей системой вулкана. Питающие системы действующих вулканов образуются вследствие геодинамических причин. Одним из возможных механизмов образования очага является относительно медленное «всплытие» под действием силы Архимеда значительного объема магмы более легкой, чем окружающие породы на глубине ее возникновения. Подъем расплава останавливается на некоторой глубине, где плотности магмы и вмещающей породы сравниваются. Периферийный очаг непосредственно с вулканом связывает очень тонкий канал, радиуса порядка десятков метров при длине в несколько километров, по которому на поверхность доставляется извергаемый вулканический материал. Можно считать [1], что на глубинах порядка 100–150 км действует источник постоянной во времени магмы, создающий в нижней части питающей системы вулкана некоторое превышение давления над литостатическим (под действием геодинамических факторов), вызывающее течение магматического расплава вверх по системе очагов вулкана.

Имеющиеся математические модели извержения вулкана связаны с рассмотрением подъема газонасыщенной магмы по верхнему каналу (который называют «конduit») вулкана представлены в обзоре [2]. Питающая система вулкана входит в математическое описание процесса извержения вулкана в качестве граничного условия на нижней границе вулканического канала. Извергающийся вулкан может вносить возмущения в расположенные внизу магматические очаги, в которых могут возникать физические процессы, связанные не только с химической и гравитационной дифференциацией магматического расплава и его медленного остывания.

Примем в качестве модельного представления о питающей системе вулкана цилиндрическую область с вертикально расположенной осью. Верхнее окончание этого цилиндра расположим на глубине около 5 км, где находится периферийный магматический очаг. Радиус R окружности цилиндра примем совпадающим с радиусом верхнего периферийного очага. Некоторыми изменениями радиуса R происходящими с увеличением глубины, при переходе от периферийного очага к более глубоким очагам, пренебрежем. Радиус R характеризует некоторый «средний» радиус всей питающей системы вулкана. Нижняя часть цилиндра может опускаться до глубин в 150 км, как это наблюдается для вулканов Камчатки [1].

Примем цилиндрическую систему координат (r, ϕ, z) , ось z которой совместим с осью модельного цилиндра питающей системы вулкана. Время обозначим t . Известно, что магматический расплав имеет реологические свойства максвелловской жидкости [3]. Охарактеризуем магматический расплав, как максвелловскую жидкость давлением p , плотностью ρ , вязкостью μ , упругим модулем E , временем релаксации $\lambda = \mu/E$, скоростью $\vec{v} = (u, v, w)$, где u — компонента скорости направленная вдоль радиуса (радиальная компонента), w — компонента скорости направленная вдоль оси цилиндра (осевая компонента), v — компонента скорости направленная перпендикулярно радиусу и оси (тангенциальная компонента). Вектором с компонентами $(0, 0, -g)$ обозначим ускорение свободного падения, величину которого примем не зависящей от высоты. Точку начала отсчета высоты расположим в нижней части модельного цилиндра. Нижними индексами r, ϕ, z, t обозначим взятие частной производной по соответствующей координате и времени.

Для системы дифференциальных уравнений, описывающей течение расплава в питающей системе вулкана примем следующие упрощающие предположения: 1) малость скоростей течения в питающей системе вулкана, а также малость возмущений плотности и давления, в этом случае плотность представляется в виде суммы $\rho = \rho_0 + \varrho$, где $\rho_0 = \text{const}$, а ϱ — малое изменение плотности; 2) независимость течения от угловой координаты, т. е. $f_\phi = 0$, где f — одна из рассматриваемых характеристик расплава; 3) независимость течения от вертикальной координаты, т. е. $f_z = 0$, что возможно, если длина рассматриваемого модельного цилиндра превышает его радиус в 8–10 раз.

Эти упрощающие предположения позволяют записать исходную систему нелинейных дифференциальных уравнений в линеаризованном виде. Линейные уравнения описывают малые возмущенные течения магматического расплава в питающей системе вулкана и несомненным их достоинством является возможность получения аналитического решения.

Из уравнений движения и реологического уравнения для осевой компоненты скорости движения получается уравнение в частных производных

$$w_{tt} + \frac{1}{\lambda} \left(w_t + \frac{p_z}{\rho_0} + g \right) = \frac{\mu}{\lambda \rho_0} \left(w_{rr} + \frac{w_r}{r} \right) \quad (1)$$

с граничным условием $w(r = R) = 0$ и требованием ограниченности на оси. Это уравнение для декартовых прямоугольных координат приведено в [4]. Частным решением уравнения (1) является выражение [5]

$$w_n(r, t) = - \frac{(p_z + \rho_0 g) (R^2 - r^2)}{4\mu} + aR^2 J_0 \left(\omega_{0,n} \frac{r}{R} \right) \exp \left(-\frac{t}{2\lambda} \right) \cos \left(t \frac{\gamma^z}{2\lambda \rho_0} + \phi_0 \right), \quad (2)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка, для краткости обозначено $(\gamma^z)^2 = 4\lambda\mu\rho_0\omega_{0,n}^2 R^{-2} - \rho_0^2 > 0$, $\omega_{0,n}$ — корни решения уравнения $J_0(\omega R) = 0$, число $n = 0, 1, 2, \dots, a$, ϕ_0 — постоянные интегрирования. Первое слагаемое в (2) описывает известное течение Пуазейля.

Отметим, что величина $(p_z + \rho_0 g)$ является превышением градиента давления над литостатическим градиентом давления и может быть оценена по расходу массы извергающегося вулкана. Для оценки примем объем выбрасываемого вулканом материала 0.1 км^3 в год, тогда для течения Пуазейля в цилиндре радиуса $R = 3000 \text{ м}$ при $\mu = 10^6 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ получим $(p_z + \rho_0 g) \approx 10^{-7} \text{ Па м}^{-1}$. Величина $(p_z + \rho_0 g)$ зависит от четвертой степени радиуса R .

Для радиальной компоненты скорости движения получается система линейных уравнений в частных производных

$$D_t = \frac{1}{r\rho_0} (rF)_r, \quad F_t + \frac{F}{\lambda} = 2\frac{\mu}{\lambda} D_r, \quad \frac{1}{r} (ru)_r = D \quad (3)$$

с граничными условиями $u(r=0) = 0$ и $u(r=R) = 0$ и требованием ограниченности на оси. Первое уравнение в (3) определяет зависимость дивергенции $D = r^{-1}(ru)_r$ от времени, второе уравнение является следствием реологического уравнения, величиной F обозначена правая часть линеаризованного уравнения движения $\rho_0 u_t = F$.

Ограниченное на оси частное решение системы (3), исчезающее в отсутствие колебаний, имеет вид [5]

$$u_n(r, t) = \frac{A}{\omega_{1,n}} J_1 \left(\omega_{1,n} \frac{r}{R} \right) \exp \left(-\frac{t}{2\lambda} \right) \cos \left(t \frac{\gamma^r}{2\lambda\rho_0} + \phi_0 \right), \quad (4)$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого порядка, $\omega_{1,n}$ — корни решения уравнения $J_1(\omega R) = 0$, число $n = 0, 1, 2, \dots$, A, ϕ_0 — постоянные интегрирования, $(\gamma^r)^2 = 8\lambda\mu\rho_0\omega_{1,n}^2 R^{-2} - \rho_0^2 > 0$.

Из уравнения неразрывности $\varrho_t + \rho_0 D = 0$ для возмущения плотности может быть получено выражение [5]

$$\begin{aligned} \varrho_n(r, t) = & \frac{A\rho_0}{4\mu\omega_{1,n}^2} J_0 \left(\omega_{1,n} \frac{r}{R} \right) \exp \left(-\frac{t}{2\lambda} \right) \times \\ & \times \left(\rho_0 \cos \left(\frac{t\gamma^r}{2\lambda\rho_0} + \phi_0 \right) - \gamma^r \sin \left(\frac{t\gamma^r}{2\lambda\rho_0} + \phi_0 \right) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

произвольная функция радиуса, возникающая при интегрировании которого положена равной нулю из условия отсутствия возмущения плотности при отсутствии колебаний при $A = 0$.

Полученные уравнения и их решения показывают возможность возникновения колебаний в питающей системе вулкана под действием внешних возмущений (например от извергающегося на поверхности вулкана). Эти колебания возникают как для осевой компоненты скорости, так и для направленной вдоль радиуса компоненты скорости. Колебания радиальной компоненты скорости, согласно уравнению неразрывности, соответствуют малым колебаниям плотности магматического расплава. Амплитуда колебаний возмущения плотности максимальна на оси цилиндрического канала и приводят к изменениям веса столба магматического расплава, так что перепад давления $p_z + (\rho_0 + \varrho(r))g$, под действием которого магматический расплав поднимается на поверхность, перестает быть

равномерным по всему поперечному сечению канала и может оказаться больше для легких центральных слоев канала, поскольку давление в нижней части канала можно принять неизменным.

Частоты возникающих колебаний определяются величинами $(\gamma^z)^2 = 4\lambda\mu\rho_0\omega_{0,n}^2 R^{-2} - \rho_0^2$ для осевой компоненты скорости и $(\gamma^r)^2 = 8\lambda\mu\rho_0\omega_{1,n}^2 R^{-2} - \rho_0^2$ для радиальной компоненты скорости.

Знак величины $(\gamma^r)^2$ определяет поведение решения (2) во времени: положительные значения описывают колебательные, а отрицательные — затухающие во времени режимы течения. Оценим значения радиуса канала R_0 , при котором происходит смена знака величины $(\gamma^r)^2$. Из условия $\gamma^r \approx 0$ получаем $R_0^2 \approx 8\lambda\mu\omega_{1,1}^2 \rho_0^{-1}$, что при $\lambda = 10$ и $\mu = 10^{10}$ показывает $R_0 \approx 30$ км, и увеличивается с ростом вязкости, времени релаксации и числа $\omega_{1,n}$. При заданных λ и μ в каналах радиуса большего R_0 не возникает колебаний радиальной скорости, а в каналах радиуса меньшего R_0 колебания возможны. В случае, если радиус канала вулкана лишь немного меньше максимального $R \approx R_0$, период возникающих колебаний будет являться большой величиной.

При эксплозивных извержениях вулкана часто наблюдаются колебания поверхности, которые называются «вулканическая дрожь». Возможно, что смещения поверхности, соответствующие компонентам скорости описываемым решениями (2)–(4), могут фиксироваться на поверхности и связаны с «вулканической дрожью».

В рассматриваемой задаче начальные условия, необходимые для получения решений представленных уравнений, не определены точно. По этой причине записаны только частные решения (2), (4), (5), которые показывают как может реагировать на возмущения питающая система вулкана, описываемая в линейном случае уравнениями гиперболического типа. Возмущения могут возникать вблизи кратера извергающегося вулкана, откуда они воздействуют на глубины, где расположена питающая система вулкана. Это воздействие может быть сложным для постановки начальных условий. Возмущения могут возникать и внутри магматического расплава, в связи с процессами дегазации и дифференциации расплава. Под действием сейсмических возмущений также возможно возникновение описанных колебаний в глубоких слоях питающей системы вулкана, где радиус рассматриваемого цилиндра может оказаться заметно больше радиуса периферийной камеры. В этом случае возмущение может вызвать длиннопериодные колебания в нижней части питающей системы вулкана.

Литература

1. Федотов С. А. Магматические питающие системы и механизм извержений вулканов.— М.: Наука, 2006.—455 с.
2. Gopfermann H. M., Manga M. The fluid mechanics inside a volcano // Ann. Rev. Fluid Mech.—2007.—Vol. 39.—P. 321–56.
3. Жариков В. А. Основы физической геохимии.—М.: Изд-во Моск. ун-та: Наука, 2005.—654 с.
4. Янков В. И., Глот И. О., Труфанова Н. М., Шакиров Н. В. Течение полимеров в отверстиях фильер.—М.-Ижевск: НИЦ Регуляр. и хаот. динамика. Ин-т компьют. исслед.—2010.—386 с.
5. URL: <http://www.maplesoft.com/contact/>.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

С. В. Ревина

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пространственно-периодические течения вязкой жидкости находят широкое применение в математическом моделировании различных физических процессов. Классическое течение Колмогорова с синусоидальным профилем скорости

$$\mathbf{V} = (0, \gamma \sin(x_1))$$

является отправной точкой многих современных аналитических и численных исследований.

В работе рассматривается двумерное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1 и L_2 соответственно. Поле скорости и давление удовлетворяют системе уравнений Навье — Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Средняя по прямоугольнику периодов скорость считается заданной. Предполагается, что один из пространственных периодов $L_2 = 2\pi/\alpha$ стремится к бесконечности, когда волновое число $\alpha \rightarrow 0$.

Целью настоящей работы является построение общего члена длинноволновой асимптотики задачи устойчивости класса стационарных сдвиговых течений

$$\mathbf{V} = (0, V(x_1)).$$

В [1] выведены рекуррентные формулы и дан алгоритм нахождения k -го члена асимптотики в предположении, что среднее скорости отлично от нуля. В [2] рассмотрена линейная сопряженная задача.

В настоящей работе выведены рекуррентные формулы для нахождения ведущих членов длинноволновой асимптотики задачи устойчивости стационарных двумерных сдвиговых течений вязкой жидкости с нулевым средним $\langle V \rangle = 0$ в двух случаях: колебательной и монотонной потери устойчивости. В случае, когда основной профиль скорости является нечетным, указаны симметрии возмущений скорости и давления. В частности, монотонная потеря устойчивости обоснована способом, отличным от имеющихся в литературе.

В случае ненулевого среднего приведены также результаты построения асимптотики задачи устойчивости для непараллельных течений и построение асимптотики вторичных течений в нелинейном случае.

Литература

1. Ревина С. В. Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений // Журн. вычисл. мат. и мат. физ.—2013.—Т. 53, № 8.—С. 1387–1401.
2. Ревина С. В. К задаче устойчивости сдвиговых течений относительно длинноволновых возмущений // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 4.—С. 50–60.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ,
АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ЛИНЕАРИЗОВАННУЮ ЗАДАЧУ
ТРАНСПОРТА НАНОСОВ¹

В. В. Сидорякина (Россия, Таганрог; ТИ им. А. П. Чехова),
А. И. Сухинов (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Рассматривается нелинейная начально-краевая задача, описывающая транспорт донных наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов, описание которой представлено в работах [1–4]. Указанная задача исследуется посредством ее линеаризации [3]. В данной работе представлены некоторые результаты исследования конечно-разностной схемы, аппроксимирующей линеаризованную задачу транспорта наносов.

Покроем расчетную область — прямоугольник — равномерной прямоугольной расчетной сеткой $\omega = \omega_x \times \omega_y$, считая, что сетка по времени ω_τ определена: $\omega_x = \{x_i = ih_x, 0 \leq i \leq N_x - 1, \ell_x = h_x(N_x - 1)\}$, $\omega_y = \{y_j = jh_y, 0 \leq j \leq N_y - 1, \ell_y = h_y(N_y - 1)\}$, где n, i, j — индексы узлов сеток, построенных по временной Ot и пространственным направлениям Ox, Oy соответственно, τ, h_x, h_y — шаги по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно.

Для получения разностной схемы воспользуемся методом баланса. Проинтегрируем обе части уравнения транспорта наносов по области D_{txy} :

$$D_{txy} \in \{t \in [t_n, t_{n+1}], x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], y \in [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]\},$$

в результате получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \iiint_{D_{txy}} (1 - \varepsilon) H'_t dt dx dy + \iiint_{D_{txy}} (k\tau_{b,x})'_x dt dx dy + \iiint_{D_{txy}} (k\tau_{b,y})'_y dt dx dy = \\ & = \iiint_{D_{txy}} \left(k \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} H'_x \right)'_x dt dx dy + \iiint_{D_{txy}} \left(k \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} H'_y \right)'_y dt dx dy. \end{aligned} \quad (1)$$

Воспользовавшись методом баланса и выполнив некоторые преобразования интегральных выражений, получим разностную схему, аппроксимирующую линеаризованную непрерывную задачу:

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) \frac{H_{i,j}^{n+1} - H_{i,j}^n}{\tau} + \frac{k_{i+1/2,j}^n (\tau_{b,x})_{i+1/2,j}^n - k_{i-1/2,j}^n (\tau_{b,x})_{i-1/2,j}^n}{h_x} + \\ + \frac{k_{i,j+1/2}^n (\tau_{b,y})_{i,j+1/2}^n - k_{i,j-1/2}^n (\tau_{b,y})_{i,j-1/2}^n}{h_y} = \end{aligned}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-08619, и по проекту № 00-16-13 в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 1.33П.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \left(k_{i+1/2,j}^n \frac{H_{i+1,j}^{n+\sigma} - H_{i,j}^{n+\sigma}}{h_x^2} - k_{i-1/2,j}^n \frac{H_{i,j}^{n+\sigma} - H_{i-1,j}^{n+\sigma}}{h_x^2} \right) + \\
&+ \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \left(k_{i,j+1/2}^n \frac{H_{i,j+1}^{n+\sigma} - H_{i,j}^{n+\sigma}}{h_y^2} - k_{i,j-1/2}^n \frac{H_{i,j}^{n+\sigma} - H_{i,j-1}^{n+\sigma}}{h_y^2} \right), \tag{2}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
(\tau_{b,x})_{i+1/2,j}^n &= \frac{(\tau_{b,x})_{i+1,j}^n + (\tau_{b,x})_{i,j}^n}{2}, \quad (\tau_{b,y})_{i,j+1/2}^n = \frac{(\tau_{b,x})_{i,j+1}^n + (\tau_{b,y})_{i,j}^n}{2}, \\
k_{i+1/2,j}^n &= \frac{A\omega d \left| (\vec{\tau}_b)_{i+1/2,j}^n - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} (\text{grad } H)_{i+1/2,j}^n \right|}{((\rho_1 - \rho_0)gd)^\beta}.
\end{aligned}$$

Значение $\text{grad } H|_{(x_{i+1/2}, y_j)}$ запишется в виде

$$(\text{grad } H)_{i+1/2,j} = \frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{h_x} \vec{i} + \frac{H_{i+1/2,j+1} - H_{i+1/2,j-1}}{2h_y} \vec{j}.$$

Вводим ограничение на шаг по времени для значения весового параметра $\sigma < 1$:

$$\tau < \frac{\sin \varphi_0 (1 - \varepsilon)}{\tau_{bc} (1 - \sigma) \max_{0 \leq m \leq N-1} \{k(t_m)\} \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right)}.$$

Аппроксимацию граничных условий для краткости изложения не приводим.

Оценка сверху для сеточной функции — решения разностной задачи (2) в сеточной норме $C_{h,\tau}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\|H^n\|_{C_{h,\tau}} &\leq \|H^0\|_{C_h} + \max(\|H_1\|_{C_{h,\tau}}, \|H_2\|_{C_{h,\tau}}, \|H_3\|_{C_{h,\tau}}) + \\
&+ \frac{\tau}{1 - \varepsilon} \sum_{m=0}^n \left\| \left(k(t_m) \tau_{b,x} \right)_x^m + \left(k(t_m) \tau_{b,y} \right)_m^y \right\|_{C_{h,\tau}}. \tag{3}
\end{aligned}$$

Оценка (3) гарантирует устойчивость построенной разностной схемы по функции правой части, граничным и начальным условиям.

Литература

1. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А. Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководных водоемов // Изв. ЮФУ. Тех. науки.—2011.—№ 8 (121).—С. 159–167.
2. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов // Изв. ЮФУ. Тех. науки.—2011.—№ 8 (121).—С. 32–44.
3. Сухинов А. И., Сидорякина В. В., Сухинов А. А. Достаточные условия сходимости положительных решений линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов // Вестн. Донского гос. тех. ун-та.—2017.—№ 1 (88).—С. 5–17.
4. Сухинов А. И., Сидорякина В. В. О некоторых особенностях решений линеаризованной двумерной начально-краевой задачи, описывающей транспорт наносов в мелководных водоемах // Вестн. Таганрог. ин-та им. А. П. Чехова.—2017.—№ 2.—С. 246–249.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕАРХИМЕДОВЫХ СИЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОГРАННИКОВ¹

В. И. Субботин

(Россия, Новочеркасск; ЮРГПУ(НПИ))

Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется сильно симметричным (относительно вращения граней), если: 1) у каждой грани F есть ось вращения L , перпендикулярная F и проходящая через относительную внутренность F ; 2) L является осью симметрии звезды грани F . Такой многогранник называется неархимедовым, если он не является комбинаторно эквивалентным ни правильному, ни равноугольно-полуправильному (архимедову) многограннику.

В [1] и [2] найдены все сильно симметричные многогранники, причем семь из них являются неархимедовыми. В настоящей работе доказана следующая теорема, характеризующая неархимедовы многогранники в классе всех выпуклых многогранников.

Теорема 1. *Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 является неархимедовым сильно симметричным многогранником тогда и только тогда, когда:*

- 1) его грани — равные между собой симметричные вершинно усеченные (по двум или по всем вершинам) ромбы и правильные многоугольники;
- 2) в звезде каждой усеченной ромбической грани правильная грань одного типа встречается не более двух раз;
- 3) любые две правильные грани не имеют общих вершин.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Симметричные вершинно усеченные (по двум или по всем вершинам) ромбы представляют собой шестиугольники или восьмиугольники с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теореме доказывается, что сильная симметричность многогранника является следствием условий только на строение граней и заранее не предполагает условий симметрии на звезды граней.

Литература

1. Субботин В. И. Об одном классе сильно симметричных многогранников // Чебышевский сб.—2016.—Т. 17, № 4.—С. 132–140.
2. Субботин В. И. Перечисление многогранников, сильно симметричных относительно вращения // Тр. участников междунар. шк.-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова.—Ростов н/Д., 2002.—С. 77–78.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности в рамках научного проекта № 16-41-240670.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ
РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Ю. С. Федяев

(Россия, Орел; ОГУ)

Фильтрацию несжимаемой жидкости в недеформируемом анизотропном неоднородном слое пористой среды описывают обобщенный потенциал φ и функция тока ψ . Эти функции взаимосвязаны со скоростью фильтрации $\vec{v} = (v_x, v_y)$ равенствами [1]

$$\begin{aligned}v_x &= K_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\v_y &= K_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x}.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x, y — декартовы координаты в плоскости основания слоя, $P = (P_{ij})$ — тензор проводимости слоя ($P_{ij} = HK_{ij}$, $i, j = 1, 2$, H — толщина слоя, K_{ij} — компоненты тензора проницаемости).

Полагаем, что подвижная граница Γ_t между различными жидкостями делит область фильтрации на части D_1 и D_2 . В области D_1 движется жидкость вязкости μ_1 и плотности ρ_1 , а в области D_2 — жидкость вязкости μ_2 и плотности ρ_2 . При движении одна жидкость полностью замещает другую и на границе раздела капиллярные силы пренебрежимо малы. Тогда условия непрерывности давления и расхода жидкости имеют вид

$$\begin{aligned}\mu_1 \varphi^+(z, t) - \mu_2 \varphi^-(z, t) &= (\rho_2 - \rho_1) \Pi(z, t), \\ \psi^+(z, t) &= \psi^-(z, t), \quad z \in \Gamma_t,\end{aligned}\tag{2}$$

где $z = x + iy$, $\Pi(z, t)$ — потенциал массовой силы, t — время. Символы «+» и «-» означают предельные значения функций при подходе к границе со стороны и с противоположной стороны орта нормали к ней.

Область фильтрации D может ограничивать сингулярная граница $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$. Проводимость слоя P обращается на σ_{01} в бесконечность ($K = \infty$, H — конечна) и в ноль на σ_{02} ($K = 0$ или/и $H = 0$). На этих границах должны выполняться условия

$$\varphi^+(z, t) = 0, \quad z \in \sigma_{01}, \quad \psi^+(z, t) = 0, \quad z \in \sigma_{02}.\tag{3}$$

Размеры, форма и положение границы σ_0 определяются законом изменения проводимости P .

Если обобщенный потенциал не имеет особых точек в бесконечности, то для единственности решения задачи должно выполняться условие регулярности

$$\varphi(z, t) = O(|z|^{-1}), \quad |P(z) \cdot \nabla \varphi(z, t)| = O(|z|^{-2}), \quad |z| \rightarrow \infty.\tag{4}$$

Считаем, что положение границы Γ_t на плоскости z в любой момент времени $t > 0$ описывается параметрическим уравнением (s — параметр)

$$z = z(t, s), \quad z \in \Gamma_t. \quad (5)$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение границы раздела жидкостей известно:

$$z_0 = z(0, s), \quad z \in \Gamma_0. \quad (6)$$

Дифференциальное уравнение движения границы Γ_t имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \frac{v^+(z, t) + v^-(z, t)}{2}, \quad z \in \Gamma_t, \quad (7)$$

где $v(z, t) = v_x(z, t) + iv_y(z, t)$ — комплексная скорость фильтрации.

Таким образом, задана область фильтрации D , толщина слоя H , тензор проницаемости слоя K , потенциал массовой силы Π , вязкости и плотности жидкостей, начальное положение границы Γ_0 . Необходимо найти положение границы Γ_t (5). Решение задачи состоит в интегрировании уравнения (7) при начальном условии (6). Для нахождения скорости фильтрации необходимо найти обобщенный потенциал φ или функцию тока ψ , которые удовлетворяют уравнениям (1) и условиям (2)–(4).

Поставленная задача сводится к решению системы состоящей из интегрального уравнения и дифференциальных уравнений движения границы [2]. Предложен численный алгоритм решения задачи на основе метода дискретных особенностей [3]. Исследована эволюция границы раздела жидкостей к эксплуатационной скважине [4]. Найдена зависимость времени достижения границей Γ_t скважины от параметров задачи. Изучено влияние анизотропии грунта, границ области фильтрации, различия физических свойств жидкостей на движение границы раздела.

Литература

1. Пивень В. Ф. Математические модели фильтрации жидкости.—Орел: Изд-во Орлов. гос. ун-та, 2015.—408 с.
2. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.— М.: ТОО «Янус», 1995.—520 с.
3. Федяев Ю. С. Математическое моделирование эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей и плотностей в однородном анизотропном слое пористой среды // Учен. зап. Орлов. гос. ун-та. Сер. Естеств., техн. и мед. науки.—2011.—№ 3 (41).—С. 90–97.
4. Федяев Ю. С. Исследование эволюции границы раздела различных жидкостей в анизотропном слое пористой среды // Соврем. проблемы физ.-мат. наук. Материалы II Междунар. науч.-практ. конф.—Орел: Изд-во Орлов. гос. ун-та, 2016.—С. 107–110.

Секция IV

Современные проблемы математического образования

АДАПТАЦИЯ СОВРЕМЕННЫХ ДОСТИЖЕНИЙ В НАУКЕ К ОБУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКЕ

В. С. Абатурова (Россия, Владикавказ; ЮМИ),
Е. И. Смирнов (Россия, Ярославль; ЯГПУ)

Современная система координат, предложенная государством в Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации, отводит российской фундаментальной науке, наряду с технологиями и инновациями, ключевую роль в обеспечении «независимости и конкурентоспособности страны за счет создания эффективной системы наращивания и наиболее полного использования интеллектуального потенциала нации» [1]. Развитие карового и человеческого капитала страны планируется достичь, в том числе, путем модернизации современной системы научно-технического творчества детей и молодежи.

В то же время, стремительное развитие мировой науки, увеличение объема, уровня и степени дифференциации, обобщенности и абстрагирования научных знаний, синергия математического образования, приводят к необходимости пересмотра содержания школьного образования в сторону включения в учебный процесс представлений о современных достижениях в науке, отражения научных знаний в учебном предмете [2].

Так, в Профессиональном стандарте педагога в числе необходимых знаний учителя математики присутствует знание основ «математической теории и перспективных направлений развития современной математики . . . , представление о широком спектре приложений математики и знание доступных обучающимся математических элементов этих приложений», а в числе необходимых умений — умение «использовать информационные источники, следить за последними открытиями в области математики и знакомить с ними обучающихся» [3].

Знакомство обучающихся с основами и приложениями фрактальной геометрии, теории нечетких множеств, вейвлет-анализа, криптографии и других современных разделов математики создают условия самоорганизации и точки роста личностного развития школьников и позволяют находить междисциплинарные связи информатики, математики, физики, экономики, биологии и медицины в ходе исследовательской деятельности. Такие понятия современной математики как «бифуркация», «аттрактор», fuzzy-logic и другие, должны быть услышаны и поняты обучающимися еще в школе, на уроках математики или во внеурочной деятельности в ходе создания собственных исследовательских проектов средствами математического и компьютерного моделирования.

Таким образом, разработка и адаптация современных научных достижений к обучению математике является актуальной инновационной методической задачей, эффективность решения которой зависит от совместного творчества ученых-математиков, ученых-методистов и педагогов-практиков.

Литература

1. Указ Президента Российской Федерации «О стратегии научно-технологического развития Российской Федерации».—URL: <http://www.kremlin.ru/acts/bank/41449>.
2. Смирнов Е. И., Абатурова В. С. Потребность в самореализации и инновационной деятельности педагога на основе освоения моделей научного познания.—URL: <http://gisap.eu/ru/node/110650>.
3. Приказ Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18 октября 2013 г. № 544н г. Москва «Об утверждении профессионального стандарта «Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)».—URL: <https://rg.ru/2013/12/18/pedagog-dok.html>.

ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД В ОБУЧЕНИИ ИНФОРМАТИКЕ СТУДЕНТОВ

В. Э. Алборова

(Россия, Владикавказ; СОГУ)

В работе на основе собственного педагогического опыта работы в вузе (3 года) и в школе (3 года) и изучения научно-методической литературы [1–3] показано, что в преподавании информатики в школе и вузе актуальным направлением деятельности педагога является применение практико-ориентированного подхода в обучении. Новые информационные технологии дают новые возможности в повышении эффективности обучения информатике студентов и школьников.

В качестве одного из примеров применения практико-ориентированного подхода в обучении информатики в вузе рассмотрено обучение студентов верстке страниц Интернета. В ходе обучения мною используются примеры удачной верстки реально существующих и достаточно успешных web-сайтов, на основе которых строится методика создания студентами такой верстки.

Еще одним примером удачного применения практико-ориентированного подхода в обучении студентов информатике, на мой взгляд, является привлечение студентов к работе преподавателей вуза по выполнению заказов на создание сайтов от предпринимателей или иных заказчиков. Это дает студентам бесценный профессиональный опыт, делает учебу в вузе мотивированной, содействует развитию профессиональных компетенций.

Литература

1. *Вербицкий А. А.* Личностный и компетентностный подходы в образовании: проблемы интеграции.—М.: Логос, 2009.—336 с.
2. *Панфилова А. П.* Инновационные педагогические технологии: активное обучение.—М.: Изд. центр «Академия», 2009.—192 с.
3. *Цымбаленко С. Б.* Путешествие в мир информации, или «Как информационно-коммуникативные процессы меняют мир, общество, человека».—М.: РУДН, 2015.—118 с.

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ:
ОРИЕНТИРОВОЧНАЯ ОСНОВА ДЕЙСТВИЙ

Т. Б. Бегиева

(Россия, Владикавказ; СОШ № 27)

Актуальность данной работы обусловлена необходимостью усиления методической составляющей использования метода замены множителей для минимизации ошибок учащихся при его применении.

Метод декомпозиции применяют при решении неравенств, приведенных к виду

$$U_1^{k_1} \cdot U_2^{k_2} \cdot \dots \cdot U_n^{k_n} \vee 0,$$

где k_1, k_2, \dots, k_n — целые числа, символ « \vee » обозначает один из знаков неравенства: $>, \geq, \leq, <$ [1].

В работе обоснована дидактическая целесообразность следующей ООД при решении неравенства указанного вида:

1. Нахождение области допустимых значений переменной (ОДЗ).
2. Использование схем равносильных переходов [1] и решение полученного неравенства классическим методом интервалов.
3. Отбор решений данного неравенства с учетом ОДЗ.

ПРИМЕР. Решите неравенство

$$\sqrt{(2x^2 - 11x + 15)} \log_3 |x - 2| \leq 0.$$

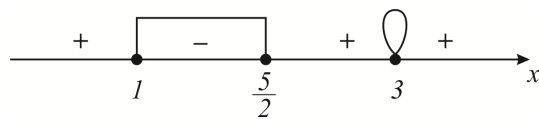
РЕШЕНИЕ.

$$1) \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 2x^2 - 11x + 15 \geq 0, \\ |x - 2| > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{5}{2}, \\ x \geq 3, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

2) Используем схемы равносильных переходов (без учета ОДЗ):

$$\begin{aligned} \sqrt{t} &\leftrightarrow t, \\ \log_a f &\leftrightarrow (f - 1)(a - 1), \\ |t_1| - |t_2| &\leftrightarrow t_1^2 - t_2^2, \\ (2x^2 - 11x + 15)(|x - 2| - 1)(3 - 1) &\leq 0, \\ \left(x - \frac{5}{2}\right)(x - 3)((x - 2)^2 - 1) &\leq 0, \\ (x - 1)\left(x - \frac{5}{2}\right)(x - 3)^2 &\leq 0. \end{aligned}$$



$$\begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{5}{2}, \\ x = 3. \end{cases}$$

3) С учетом ОДЗ получаем

$$\begin{cases} x = 3, \\ 2 < x \leq \frac{5}{2}, \\ 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Ответ: $[1; 2)$; $(2, \frac{5}{2}]$; $\{3\}$.

Материал статьи можно использовать на уроках математики в классах с углубленным изучением математики, а также при подготовке к ЕГЭ (профильный уровень).

Литература

1. Голубев В. И. Решение сложных и нестандартных задач по математике.—М., 2007.—252 с.
2. Никольский М. С. и др. Алгебра и начала математического анализа, 11 класс / 3-е изд.—М.: Просвещение, 2016.—413 с.
3. Колесникова С. И. Математика. Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ / 2-е изд., испр.—М.: Айрис-пресс, 2004.—304 с.

ПРИМЕНЕНИЕ СИНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПОДХОДА В ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ¹

В. В. Богун

(Россия, Ярославль; ЯГПУ)

При реализации процесса обучения дисциплинам естественнонаучного цикла в целом и математике в частности целесообразно применять синергетический подход, суть которого заключается в том, что определенное конечное множество объектов, объединяясь произвольным образом, могут создавать различные системы со своими уникальными свойствами, характеристиками и законами. Синергетика как наука рассматривает природные явления и процессы с точки зрения сложных самоорганизующихся систем и показывает, что все процессы и явления в природе связаны постоянным обменом веществом, энергией, информацией с окружающей средой, что неизбежно делает их неравновесными. Синергетический подход может проявиться в процессе изучения студентами математики в процессе реализации как различных видов и форм аудиторных занятий, так и в рамках самостоятельной учебной деятельности при исследовании различных процессов и объектов. Однако подобные инновации следует использовать рационально в учебном процессе и без вреда с точки зрения достижения основной цели обучения — освоения учащимися образовательных компетенций, необходимых для успешной реализации дальнейшей профессиональной деятельности.

В. В. Богуну совместно с Е. И. Смирновым разработан лабораторный практикум по математическому анализу, суть которого состоит в изучении определенных математических объектов (пределы числовых последовательностей, алгебраические уравнения, определенные интегралы, дифференциальные уравнения первого порядка) с применением различных средств информационно-коммуникационных технологий (графического калькулятора [1] и персонального компьютера [2]) на основе применения синергетического подхода [3].

В данном случае синергетический подход проявляется в рамках нахождения студентами определенных заранее неизвестных закономерностей с точки зрения полученных значений промежуточных и итоговых результатов в зависимости от варьируемых значений исходных данных с применением численных методов решения задач. Необходимо отметить, что при проведении лабораторного практикума по математическому анализу реализация синергетического подхода отражается как на локальном, так и глобальном уровне. Применение синергетического подхода на локальном уровне подразумевает реализацию малой группой студентов отдельной лабораторной работы с точки зрения реализации сравнительного анализа численных методов расчетных алгоритмов с выдвиганием и доказательством соответствующей гипотезы. На глобальном уровне синергетический подход проявляется в проведении сравнительного анализа зависимостей

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 16-18-10304.

параметров расчетных алгоритмов и значений результатов вычислений с точки зрения всей группы студентов.

Авторские программы для графического калькулятора и персонального компьютера при реализации рассматриваемого лабораторного практикума позволяют исследовать сложные явления и процессы с точки зрения межпредметных связей через призму построения различных концептуальных, математических и информационных моделей в сочетании с наглядностью, удобством использования и возможностями непосредственного сравнительного анализа как различных методов решения, так и значений промежуточных и итоговых результатов при условии варьирования значений исходных данных.

Перечислим названия лабораторных работ.

1. Расчет значений минимальных номеров приближения к пределу числовых последовательностей с использованием методов золотой пропорции, Фибоначчи, половинного деления (дихотомии) и их сравнительный анализ.

2. Приближенные решения алгебраических и трансцендентных уравнений с использованием метода половинного деления (дихотомии), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода золотой пропорции и их сравнительный анализ.

3. Приближенные вычисления значений определенных интегралов по формулам средних прямоугольников, прямоугольных трапеций, параболических трапеций (Симпсона) и их сравнительный анализ.

4. Приближенные решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с использованием методов Эйлера, Рунге — Кутты второго, четвертого порядков точности и их сравнительный анализ.

При выполнении студентами вузов лабораторных работ по математическому анализу, содержание и методика проведения которых согласуется с синергетическим подходом в педагогике, осуществляется научно-исследовательская деятельность, которая способствует формированию у обучаемых необходимых образовательных компетенций. В рамках лабораторных работ деятельность студентов подразумевает выполнение сравнительного анализа применяемых численных методов решения представленной задачи и зависимостей между варьируемыми значениями исходных данных и получаемых значений необходимых результатов с использованием программ для графического калькулятора и персонального компьютера.

Литература

1. Богун В. В., Смирнов Е. И. Лабораторный практикум по математике с графическим калькулятором / Учеб. пособие.—Ярославль: Канцлер, 2010.—272 с.
2. Богун В. В. Лабораторный практикум по исследованию функций вещественного переменного с применением программ для ЭВМ / Учеб. пособие.—Ярославль: Канцлер, 2014.—84 с.
3. Смирнов Е. И., Богун В. В., Уваров А. Д. Синергия математического образования педагога: введение в анализ.—Ярославль: Канцлер, 2016.—310 с.

ВОСПИТАНИЕ ЛИЧНОСТНЫХ КАЧЕСТВ СТУДЕНТОВ СРЕДСТВАМИ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Ю. А. Дробышев

(Россия, Калуга; Финансовый университет)

Приоритетной задачей в сфере воспитания, определенной стратегией развития воспитания в Российской Федерации на период до 2025 года, является развитие высоконравственной личности, разделяющей российские традиционные духовные ценности.

Эффективность и качество образования зависят от взаимодействия процессов обучения и воспитания и, в свою очередь, от их эффективности и качества. В связи с этим, реализация данной концепции должна осуществляться при изучении различных дисциплин, в том числе и математики, а это, в свою очередь, требует соответствующей подготовки будущих учителей математики к такой работе.

Многие отечественные математики и методисты (В. В. Бобынин, Б. В. Болгарский, Н. Я. Виленкин, И. Я. Деман, А. И. Маркушевич, В. Н. Молодший, Д. Д. Мордухай-Болтовской, М. В. Остроградский, Т. С. Полякова, А. Я. Хинчин и другие) указывали на необходимость обращения к жизни и творчеству ученых-математиков для решения различных воспитательных задач.

Обращение к персоналистическому компоненту истории математики позволяет продемонстрировать проявление моральных качеств личности ученых и формировать на этой основе как нравственный идеал у студентов, так и методические умения по его использованию для воспитательной работы с обучающимися.

Результаты анализа исследований, посвященных этой проблеме и представленные в работе [1], а также концепция историко-математической подготовки будущего учителя математики, раскрытая в работе [2], позволили выявить основные направления использования потенциала персоналистического компонента в осуществлении воспитательной работы при обучении математике. К ним относятся:

- 1) воспитание патриотизма, чувства любви к отечеству;
- 2) интернациональное воспитание;
- 3) формирование уважения к труду и чувства ответственности;
- 4) формирование волевых качеств личности;
- 5) демонстрация необходимых качеств творческой личности;
- 6) формирование нравственных качеств личности [1, с. 13].

Возможность осуществления обозначенных выше направлений обеспечивается способностью учителя к осуществлению воспитательной работы. Такая подготовка должна быть направлена на формирование у студентов:

– знаний о структуре и содержании персоналистического компонента истории математики;

– умений по отбору персоналистического материала, обладающего гражданским и нравственно значимым потенциалом;

– умений по осуществлению гражданского и нравственного воспитания учащихся на основе биографического материала и фактов из жизни и творчества ученых-математиков [2, с. 248].

Таким образом, существует объективная возможность говорить о формировании как личностных, так и профессиональных качеств студента средствами истории математики.

Осознание существующей возможности и важности реализации преподавателем воспитания студентов средствами истории математики ставит проблему определения содержания материала, с помощью которого можно формировать соответствующие компетенции.

Нами совместно с И. В. Дробышевой и О. Б. Тарас издано пособие [1], в котором представлен материал, позволяющий преподавателю не только организовать всестороннюю работу по воспитанию студентов и учащихся, но и привлечь их к созданию информационной базы о воспитательном потенциале персоналистического компонента истории математики.

Литература

1. Дробышев Ю. А., Дробышева И. В., Тарас О. Б. Воспитание личностных качеств студентов: материалы персоналистического компонента истории математики.—М.: Изд-во ООО «ТРП», 2017.—288 с.
2. Дробышев Ю. А. Многоуровневая историко-математическая подготовка будущего учителя математики: Дис. ... д-ра пед. наук.—М., 2011.—452 с.

ПЕРЕФОРМУЛИРОВКИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

В. Н. Дятлов

(Россия, Новосибирск, НГУ; Владикавказ, ЮМИ)

Задачи с параметрами давно являются неотъемлемой частью экзаменов разного уровня, и это несмотря на то, что в школьном курсе математики они практически не представлены. Внимание к задачам с параметрами обусловлено тем, что такие задачи предполагают наличие у учащихся навыков рассуждений, а также глубокого и разностороннего использования материала школьного курса математики, показывают подготовленность абитуриента к дальнейшему обучению по специальностям с большим объемом математических дисциплин, в том числе инженерным. Поэтому среди школьников, нацеленных на обучение по естественнонаучным специальностям, связанным с математикой, возможен интерес к решению таких задач.

Решение задач с параметрами предполагает хорошее владение самой разнообразной техникой из материала школьной программы. Но даже хорошо подготовленный на школьном уровне учащийся может не справиться с задачей с параметром по той причине, что, владея базой, он не сможет ею воспользоваться, ибо не сможет уловить, какие средства и каким образом надлежит использовать при решении поставленной задачи.

Трудности при решении задач с параметрами во многом определяются тем, что требуется выбрать подходящий метод для решения предложенной задачи. Одним из способов выбора метода является переформулировка задачи. Задача может быть сформулирована в разных терминах: соотношений (уравнений, неравенств, систем), функций, множеств на плоскости. Однако ее решение может оказаться эффективным совсем в других терминах. Нередко ответы на поставленные вопросы для системы уравнений с двумя неизвестными прозрачны при графической интерпретации на координатной плоскости, анализ взаимодействий множеств решений может оказаться выполнимым при использовании свойств функций, особенности предложенных соотношений могут проявиться в результате замены переменных и формулировки задачи в новых переменных и т. д. Поэтому способность распознать возможность переформулировки, провести необходимую переформулировку и довести решение до завершения является одной из важных составляющих при формировании навыков решения задач с параметрами.

Среди наиболее часто встречающихся переформулировок можно отметить следующие.

1. Переход с языка соотношений на язык графики, поиск пути решения на графическом языке с последующим переходом на язык соотношений. При таком типе переформулировок возникают графические интерпретации, использующие плоскость переменных, плоскость «переменная — значение» или плоскость «переменная — параметр». Для эффективного применения указанных интерпретаций необходимы средства перевода разных условий с языка соотношений на

язык графики. После проведения анализа на языке графики вырабатывается алгоритм решения задачи, который затем реализуется в терминах соотношений.

2. Переход от свойств соотношения к свойствам функций, т. е. на функциональный язык. Здесь требуется свободное владение свойствами функций в плане распознавания возможности их использования и перевода условия задачи на функциональный язык. Принятие решения на функциональном языке требует обычно перевода на язык соотношений для получения результата.

3. Замена переменных появляется в тех случаях, когда переменные участвуют в соотношениях, будучи вмонтированными в какие-то единообразные блоки, которые естественно воспринимать как единое целое. При выполнении замены важно проследить за ограничениями, сопровождающими замену, и переформулировать поставленную задачу в терминах новых переменных.

Можно привести много примеров возможности применения переформулировок, опираясь на опыт экзаменов последних лет.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ КЛАССА ГАММЕРШТЕЙНА ДРОБНОГО
ПОРЯДКА ПРИ НАЛИЧИИ АВТОКОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХ

А. В. Иванов (Россия, Самара; СамГУПС),
Д. В. Иванов (Россия, Самара; СамГУПС)

В настоящее время активно развиваются методы идентификации нелинейных динамических систем, описываемыми уравнениями с производными и разностями дробного порядка [1–2]. В статье [1] рассмотрена идентификация динамических систем класса Гаммерштейна дробного порядка с известной нелинейной частью общего вида. В данной статье рассматривается идентификация динамической системы класса Гаммерштейна дробного порядка с неизвестными коэффициентами полиномиальной нелинейности.

Нелинейная динамическая система класса Гаммерштейна, описывается стохастическими уравнениями с разностями дробного порядка:

$$\sum_{m=1}^{r_1} b^{(m)} \Delta^{\alpha^{(m)}} z_{i-f_1^{(m)}} = \sum_{m=1}^r a^{(m)} \Delta^{\beta_m} \eta_m(x_{i-f^{(m)}}) + \varsigma_i, \quad y_i = z_i + \xi_i, \quad (1)$$

где

$$0 < \alpha^{(1)} < \dots < \alpha^{(r_1)}, \quad 0 < \beta^{(1)} < \dots < \beta^{(r)},$$

$$\Delta^{\alpha^{(m)}} z_i = \sum_{j=0}^i \binom{\alpha^{(m)}}{j} z_{i-j}, \quad \Delta^{\beta^{(m)}} x_i = \sum_{j=0}^i \binom{\beta^{(m)}}{j} x_{i-j},$$

$$\binom{\alpha^{(m)}}{j} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha^{(m)} + 1)}{\Gamma(j+1) \Gamma(\alpha^{(m)} - j + 1)}, \quad \binom{\beta^{(m)}}{j} = \frac{(-1)^j \Gamma(\beta^{(m)} + 1)}{\Gamma(j+1) \Gamma(\beta^{(m)} - j + 1)}.$$

Требуется определять оценки неизвестных коэффициентов $b^{(m)}$, $a^{(m)}$ динамической системы описываемой уравнением (1) по наблюдаемым последовательностям y_i , x_i при известных порядках r , r_1 , α_m , β_m , $f_1^{(m)}$, $f^{(m)}$.

1. Множество \tilde{V} , которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой линейной системы, является компактным.

2. Вектор входных переменных и истинные значения параметров удовлетворяет условию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\left(\varphi_z^{(i)} \right)^T \mid \left(\varphi_\eta^{(i)} \right)^T \right)^T \left(\left(\varphi_z^{(i)} \right)^T \mid \left(\varphi_\eta^{(i)} \right)^T \right) = H \quad \text{п. н.},$$

где

$$\varphi_z^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^i \binom{\alpha_n^{(1)}}{j} z_{i-\bar{f}^{(1)}}, \dots, \sum_{j=0}^i \binom{\alpha_n^{(r_1)}}{j} z_{i-\bar{f}^{(r_1)}} \right),$$

$$\varphi_\eta^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^i \binom{\beta^{(1)}}{j} \eta_1(x_{i-f^{(1)}}), \dots, \sum_{j=0}^i \binom{\beta_n^{(r)}}{j} \eta_{r_1}(x_{i-f^{(r)}}) \right),$$

H — положительно определенная матрица.

3. $\{x_i\}$ статистически не зависят от $\{\xi_i\}, \{\varsigma_i\}$.
 4. Помеха $\{\xi_i\}$ и параметры системы $\alpha^{(m)}$ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N+g} \xi_i \xi_{i+g} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{a.s.} h_\xi(g) < \infty, \quad \sum_{g=1}^N |h_\xi(g)| < \infty, \quad g = \overline{0, \infty},$$

где $h_\xi(g)$ — локальная автокорреляционная функция.

Матрица

$$H_\alpha = \begin{pmatrix} h_\alpha^{(11)} & \dots & h_\alpha^{(1r_1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\alpha^{(r_1 1_1)} & \dots & h_\alpha^{(r_1 r_1)} \end{pmatrix},$$

$$h_\alpha^{(mm')} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{g=0}^{N-j} \sum_{j=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \alpha_n^{(ml)} \\ j - \bar{f}(nml) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n^{(m'l')} \\ j - \bar{f}(nm'l') \end{pmatrix} h_{\xi^{(n)} \xi^{(n')}}(g) \frac{N-j-g}{N},$$

положительно определена.

Введем обозначения

$$\theta = (\theta_b | \theta_a)^T = (1, b^{(2)}, \dots, b^{(r_1)} | a^{(1)}, \dots, a^{(r)})^T, \quad \varphi_i = (\varphi_y^{(i)} | \varphi_\eta^{(i)})^T.$$

Будем определять оценки по следующему критерию:

$$\min_{\theta \in \mathbb{B}} \sum_{i=1}^N \frac{(\varphi_y^{(i)} \theta_b^T - \varphi_\eta^{(i)} \theta_a^T)^2}{\sigma_\zeta^2 + \theta_b^T H_\alpha \theta_b^T}, \quad (2)$$

где

$$\sigma_\zeta^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \varsigma_i^2, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N \varphi_\xi^{(i)} (\varphi_\xi^{(i)})^T \right] = H_\alpha,$$

$$\varphi_\xi^{(i)} = \left(\Delta^{\alpha^{(1)}} \xi_{i-f_1^{(1)}}, \dots, \Delta^{\alpha^{(r_1)}} \xi_{i-f_1^{(r_1)}} \right)^T.$$

Теорема 1. Пусть некоторый случайный процесс $\{y_i, i = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ описывается уравнением (1) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1–4. Тогда оценки $\hat{b}(N), \hat{a}(N)$, определяемые выражением (2) с вероятностью 1 при $N \rightarrow \infty$, существуют, единственные и являются сильно состоятельными оценками.

Литература

1. Ivanov D. V. Identification discrete fractional order Hammerstein systems // International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON 2015).—Omsk, 2015.
2. Иванов Д. В. Идентификация ARX систем Винера дробного порядка при наличии помехи во входном сигнале // Стохаст. оптимизация в информатике.—2013.—Т. 9, № 2.—С. 41–46.
3. Иванов Д. В., Кацюба О. А. О состоятельности оценок параметров ARX-систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале // Журн. Средневож. мат. о-ва.—2016.—Т. 18, № 2.—С. 21–32.

ИЗУЧЕНИЕ АТТРАКТОРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ
В РАМКАХ МНОГОЭТАПНЫХ МАТЕМАТИКО-ИНФОРМАЦИОННЫХ
ЗАДАНИЙ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ КРЕАТИВНОСТИ СТУДЕНТОВ¹

В. А. Ивков (Россия, Кострома; КГУ им. Н. А. Некрасова),
В. С. Секованов (Россия, Кострома; КГУ им. Н. А. Некрасова),
Е. И. Смирнов (Россия, Ярославль; ЯГПУ)

Многоэтапные математико-информационные задания, являющиеся специально составленной последовательностью задач, упражнений, проблем и дидактических ситуаций, которые соединяют друг с другом: различные виды творческой математической деятельности; проведение математико-компьютерных экспериментов; выполнение лабораторных работ по математике и информатике; программирование фракталов; создание художественных композиций с помощью компьютерных технологий, рассмотрены В. С. Сековановым в [1]. Мы понимаем многоэтапные математико-информационные задания как лабораторию, в рамках которой происходит творческая математическая и творческая информационная деятельность, нацеленные на развитие креативных качеств бакалавра, магистра и аспиранта. При выполнении МИЗ мы опираемся на результаты, полученные в работах [3–6].

НА ПЕРВОМ ЭТАПЕ дается определение нелинейного отображения, приводятся примеры нелинейных отображений. Вводится понятие «аттрактор» как притягивающее множество. Приводятся простейшие примеры аттракторов: для $f(x) = x^2$ аттрактором будет неподвижная притягивающая точка $x = 0$, а для $\varphi(a, x) = (1 + a)x - x^3$ диаграммой аттракторов будет дерево Фейгенбаума, имеющее структуру различной сложности в зависимости от значений параметра a . В одних случаях аттрактор будет состоять из одной, двух и т. д. точек и постепенно усложняться. При определенных значениях параметра a аттрактор имеет фрактальную структуру и называется странным. Странные аттракторы используются в экономике (для создания модели роста капитала), в биологии (для создании модели роста популяций), в физике (моделирование фазовых переходов) и т. д.

НА ВТОРОМ ЭТАПЕ исследуются хаотические отображения. Как оказалось, между странными аттракторами и хаосом проявляется тесная связь. Существуют различные определения хаоса для отображений. Так, хаотичное отображение по Девани обладает тремя свойствами: существенной зависимостью от начальных условий; транзитивностью; всюду плотностью периодических точек [2].

НА ТРЕТЬЕМ ЭТАПЕ рассматривается преобразование Бернулли, как классическое (функция обратного сдвига), так и его модификации. Устанавливается хаотичность модифицированного преобразования Бернулли на соответствующем множестве Кантора.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-18-10304.

НА ЧЕТВЕРТОМ ЭТАПЕ исследуются аттракторы модифицированного преобразования Эно

$$T_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y^{\frac{1}{n}} \\ bx^n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Находятся неподвижные точки преобразования, проводится его линеаризация. Разрабатывается алгоритм визуализации аттракторов модифицированного преобразования Эно.

НА ПЯТОМ ЭТАПЕ рассматривается преобразование пекаря. Доказывается хаотичность преобразования, находится размерность его аттракторов.

НА ШЕСТОМ ЭТАПЕ изучается знаменитое преобразование «Кошка Арнольда». Сначала находятся неподвижные точки отображения «Кошка Арнольда». Далее устанавливается связь матрицы преобразования с числами Фибоначчи.

НА СЕДЬМОМ ЭТАПЕ рассматривается тентообразная функция. Устанавливается ее хаотичность на множестве Кантора.

ВОСЬМОЙ ЭТАП посвящен истории развития нелинейной динамики. На данном этапе студентам даются задания для написания рефератов по основным направлениям развития нелинейной динамики.

В заключение отметим, что, многоэтапное МИЗ «Изучение аттракторов нелинейных отображений» нацелено на развитие креативности студентов. В рамках данного МИЗ при решении задач студенты применяют не только математические методы, но и разрабатывают компьютерные алгоритмы для построения аттракторов нелинейных отображений, что повышает их мотивацию как обучению математике, так и информатике, развивает такие важнейшие креативные качества, как гибкость и критичность мышления.

Литература

1. Секованов В. С. Методическая система формирования креативности студента университета в процессе обучения фрактальной геометрии.—Кострома: Изд-во КГУ им. Н. А. Некрасова, 2006.
2. Секованов В. С. Элементы теории фрактальных множеств: Учебное пособие.—М.: Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2015.
3. Секованов В. С., Ивков В. А. Многоэтапное математико-информационное задание «Странные аттракторы» // Вестн. Костром. гос. ун-та.—2013.—Т. 19, № 5.
4. Секованов В. С. Что такое фрактальная геометрия?—М.: URSS, 2016.
5. Секованов В. С., Бабенко А. С., Селезнева Е. М., Смирнова А. О. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Дискретные динамические системы» как средство формирования креативности студентов // Вестн. Костром. гос. ун-та.—2016.—Т. 22, № 2.
6. Секованов В. С., Фатеев А. С., Белоусова Н. В. Развитие гибкости мышления студентов при разработке алгоритмов построения дерева Фейгенбаума в различных средах // Вестн. Костром. гос. ун-та.—2016.—Т. 22, № 1.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Дж. А. Караева

(Россия, Владикавказ; СОШ № 30)

Цель моей работы — изучить методы для успешного решения аналогичных задач и научиться навыкам, чтобы впоследствии умело применять эти теоретические знания в практической жизни. Хочу научиться анализировать эти задачи, работать над развитием интеллектуальных и практических умений в области экономики.

С учетом реальных потребностей рынка все актуальнее становится экономика в жизни каждого человека. Эта наука может научить нас как экономическим проблемам, так и способом их удовлетворения. Важно научиться решению экономических задач математическими способами.

Анализ школьных учебников зарубежных стран (таких как Великобритания, США и Австралия) показывает, что прикладные задачи являются неотъемлемой частью школьного курса математики в этих странах, в чем, к великому сожалению, современные российские учебники заметно проигрывают.

Положение в нашей стране усугубляется недостаточным уровнем экономического образования, более того, полной экономической безграмотностью большей части населения. В связи с переходом России к рыночным отношениям повышается ответственность не только каждого гражданина за свои действия в сфере финансов, но и экономического образования и воспитания в школе.

Систематическое приобретение экономических знаний на уроках математики поможет преодолеть имеющийся разрыв между потребностями жизни и педагогическим процессом, так как школа готовит маленького человека к жизни уже в раннем детстве.

Исходя из выше изложенного, я решила рассмотреть по математике более жизненные задачи, которые имеют прямое отношение к нашей российской экономике и мне думается — это самая актуальная тема на сегодняшний день.

«Кто с детских лет занимается математикой, тот развивает внимание, тренирует мозг, свою волю, воспитывает настойчивость и упорство в достижении цели» (А. Маркушевич).

ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ ЛЮДЕЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ

Д. В. Крюков (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ),
Г. Ю. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ),
Н. В. Фролова (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Инклюзивное образование развивается на основе традиционной системы образования. Как показывают статистические данные, в настоящее время в вузах обучается около 4 процентов студентов из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) и инвалидностью. Большинство молодых людей с психофизическими отклонениями не охвачены высшим образованием, и для их привлечения нужно создавать специальные условия [1].

Инклюзивное (высшее) образование рассматривается как процесс совместного обучения, развития и воспитания лиц с ограниченными возможностями здоровья и учащихся без ограничений. Но многие студенты с ОВЗ не могут осваивать учебную программу вузов в установленные сроки и в необходимом объеме. Им требуется программа, составленная с учетом их особенностей и возможностей. Адаптированная учебная программа и индивидуальный учебный план являются важнейшими условиями успешного получения образования лицами с ОВЗ и инвалидностью [2].

Один из авторов данной работы разработал программу дистанционного обучения в целом (включая сюда выпускную квалификационную работу). Большое место в этой программе отводится роли дополнительной административной единицы — тьютора–координатора, выполняющего различные функции: 1) помощь в адаптации студента к данному типу обучения; 2) помощь в овладении необходимыми компьютерными навыками; 3) осуществление своевременной связи студента с консультантом–преподавателем конкретной дисциплины; 4) контроль соблюдения графика выполнения контрольных и лабораторных работ, сдачи тестов и т. п.

Литература

1. Александрова Л. А., Лебедева А. А., Бобожей В. В. Психологические ресурсы личности и социально–психологическая адаптация студентов с ОВЗ в условиях профессионального образования // Психолог. наука и образование.—2014.—№ 1.—С. 50–62.
2. Захаров К. К., Нигматуллина Г. В. Актуальность инклюзивного образования в ВУЗах России // Психология, социология и педагогика.—2014.—№ 1.—URL: <http://psychology.snauka.ru/2016/01/6276>.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Н. И. Лобанова

(Россия, Зеленокумск; МУДО «ЦВР»)

Учитывая важную роль, которую играют дифференциальные уравнения в математике и естествознании (физике, астрономии, химии, биологии, медицине, экономике и других), доступность ясного понимания этой роли, представляется весьма актуальной задача ознакомления учащихся старших классов с элементами теории и приложений этих уравнений в рамках системы дополнительного образования. Возникает необходимость и целесообразность обучения школьников составлению и решению дифференциальных уравнений, возникающих при изучении конкретных явлений окружающего мира. При этом важное значение имеет выбор задач, которые должны быть подобраны таким образом, чтобы они вызвали живой интерес в их решении, а также в анализе и обсуждении получаемых результатов.

Теория дифференциальных уравнений является одним из основных разделов современной математики, имеющих обширные и разнообразные приложения, благодаря тому, что для составления математической модели многих явлений в виде дифференциальных уравнений нужно, как правило, знать только локальные связи, и не нужна вся информация об этих явлениях в целом. Математическая модель дает возможность изучать явление в целом, предсказать его развитие, делать количественные оценки изменений, происходящих в нем с течением времени.

В докладе будут рассмотрены физические и геометрические задачи, представляющие интерес для обучающихся в системе дополнительного образования, сводящиеся к составлению и решению дифференциальных уравнений. При решении физических и геометрических задач используется один из основных методов исследования реальных ситуаций — метод математического моделирования, который включает три основных этапа:

- 1) перевод предложенной задачи с естественного языка на язык математических терминов, т. е. построение математической модели; примером математической модели является уравнение;
- 2) решение задачи средствами математики внутри модели;
- 3) интерпретация полученного решения, т. е. перевод полученного результата на язык, на котором была сформулирована исходная задача [1].

Математическая задача способствует формированию определенных форм мышления, необходимых для адекватного понимания окружающей нас действительности, так как изучает понятия, введенные путем абстрагирования от явлений реального мира [2].

Предлагаются следующие методические пути решения сформулированной проблемы обучения учащихся решению дифференциальных уравнений:

– решение практико-ориентированных задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям;

– устранение типичных ошибок старшеклассников при решении задач, с помощью дифференциальных уравнений.

Для успешного усвоения метода математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений учащимся можно предложить решение ряда интересных и доступных для ясного понимания задач из книги [4].

Современное занятие в системе дополнительного образования — это время, когда учащиеся сами ищут решение поставленной проблемы, спорят, сопоставляют, обобщают, делают выводы. Одним словом, активно участвуют в обсуждении того, что и как происходит в процессе решения практико-ориентированных задач [1].

Литература

1. Аммосова Н. В., Лобанова Н. И. Решение неопределенных уравнений первой степени с двумя неизвестными в системе дополнительного образования // Сиб. пед. журн.—2016.— № 2.—С. 24–30.
2. Izovska D., Kovalenko V. B., Ammosova N. V. Использование мыслительных операций как базы синергетического подхода при обучении математике // Education, Science and Economics at Universities, Integration to International Educational Area: International Conference.—Poland: Plock, 2008.—Р. 246–250.
3. Лобанова Н. И. Элементы теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования // Интернет-журн. «Мир науки» (сер. Педагогика и психология).—2016.—№ 6.—С. 1–9.
4. Пономарев К. К. Составление дифференциальных уравнений.—Минск: Высшая школа, 1973.—560 с.

МЕТОДИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

И. Е. Малова

(Россия, Брянск, БГУ; Владикавказ, ЮМИ)

Понятие методической рефлексии обучения математике является частным случаем понятия педагогической рефлексии, а «рефлексия в педагогической деятельности — это процесс мысленного . . . анализа какой-либо профессиональной проблемы, в результате которого возникает личностно окрашенное осмысление сущности проблемы и новые перспективы ее решения» [1, с. 62–63]. Из этого определения вытекают существенные признаки методической рефлексии: выделение методической проблемы; мысленный анализ проблемы; осмысление сущности проблемы; перспективные выводы для себя. Вместо слов «методическая проблема» можно использовать слова «методическая ситуация», которые расширяют сферу использования методической рефлексии.

Считается доказанным, что основным механизмом (принципом) рефлексии является установление «обратной связи».

Выделим три этапа методической деятельности: проектирование, осуществление и анализ процесса обучения, на которых осуществляется методическая рефлексия.

Рефлексию первого этапа называют «конструирующей», «упреждающей», «рефлексией-до-действия» и др.

На этом этапе учитель анализирует математическое содержание; определяет цели учебной деятельности учащихся; конструирует различные варианты своих методических действий по организации успешной деятельности учащихся с этим материалом и выбирает наиболее подходящий; соотносит свои действия с целями обучения и возможными последствиями для учащихся; обосновывает свои методические действия и др. На этом этапе мы рекомендуем учителю формулировать для себя вопросы «Почему я . . . ?» и отвечать на них. Заполнение многоточия в вопросе позволяет выделить методический прием, а ответ на вопрос — обосновать его.

Важным методическим умением является анализ учителем математического содержания «глазами учащихся». Значимость этого умения повышается в настоящее время, когда требуется уметь организовать смысловое чтение математических текстов. Методическую помощь учителю в понимании восприятия математического содержания учащимися оказывают учебники УМК «Математика. Психология. Интеллект», поскольку они построены на обогащающей модели обучения с учетом различных интеллектуальных стилей учащихся [3].

Рефлексию второго этапа называют «интерактивной», «синхронной», «рефлексией-в-действии» и др.

На этом этапе учитель организует взаимодействие учащихся с математическим материалом, с собой и друг с другом средствами математического содержания; вносит коррективы в свои запланированные действия; выявляет для себя

проблемные моменты процесса обучения и др. На этом этапе мы рекомендуем учителю фиксировать ситуации, в которых учащиеся оказываются успешными или неуспешными с помощью вопросов «Почему учащиеся ...?», где вместо многоточия ставится описание возникшей ситуации.

Рефлексию третьего этапа называют «обзорной», «ретроспективной», «рефлексией-после-действия» и др.

На этом этапе учитель соотносит поставленные ранее цели с результатом и процессом их достижения; выявляет то ценное, что может пополнить его методическую копилку; отвергает приемы, оказавшимися неэффективными и др.

На этом этапе мы рекомендуем учителю отвечать на вопросы «Почему учащиеся ...?», обобщать свои методические находки в виде описания использованных методических приемов.

Значимым для методического развития учителя является подготовка им открытых или видео уроков с последующим методическим анализом и посещение уроков своих коллег для обогащения собственного методического опыта.

Одним из условий, обеспечивающих методическое саморазвитие учителя, является наличие у него открытой познавательной позиции [2, с. 87].

Одним из средств, иллюстрирующих методическую рефлексию учителя, является созданная им лично ориентированная компьютерная презентация с анализом своих методических действий.

Литература

1. Бизяева А. А. Психология думающего учителя: педагогическая рефлексия.—Псков: ПГПИ им. С. М. Кирова, 2004.—216 с.
2. Малова И. Е. Непрерывная методическая подготовка учителя математики к осуществлению лично ориентированного обучения учащихся.—Брянск: Изд-во Брянск. гос. ун-та, 2003.—225 с.
3. Холодная М. А., Гельфман Э. Г. Развивающие учебные тексты как средство интеллектуального воспитания учащихся.—М.: Изд-во Ин-та психологии РАН, 2016.—200 с.

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ИНТЕРЕСА УЧАЩИХСЯ К МАТЕМАТИКЕ

А. Н. Мокрушин

(Россия, Калуга; КГУ им. К. Э. Циолковского)

К проблеме формирования интереса у обучающихся в рамках преподавания математических дисциплин обращались многие видные ученые-математики и методисты. На многогранность этой проблемы указывает и то, что над ней работали психологи, педагоги, философы, социологи.

Проблема формирования интереса у учащихся при обучении математике находит свое отражение уже в исследованиях ученых в XVIII–XIX вв. Они отмечали, что качественное обучение должно строиться через развитие интереса у обучающихся к учению. Это отмечалось в Резолюции I Всероссийского съезда преподавателей математики «признается желательным выработка задачник, соответствующих кругу интересов учащихся, на каждой ступени их обучения и включающих в себя данные из физики, космографии, механики и пр., а также составление математической хрестоматии, дополняющей и углубляющей сведения, выносимые учащимися из обязательной программы» [1, с. 150]. Спустя 100 лет после этого съезда в Концепции развития математического образования в Российской Федерации, утвержденной 24 декабря 2013 года, отмечается актуальность рассматриваемой проблемы и для настоящего времени. В ней обозначены основные проблемы развития математического образования, объединенные в три группы, среди которых на первом месте стоит группа проблем мотивационного характера [2, с. 2].

Различные аспекты формирования интереса к математике рассматриваются в работах С. А. Бедриной, М. И. Бекоевой, Т. Л. Блиновой, М. Д. Боярского, О. В. Ивановой, Т. Г. Ивановой, Л. П. Кибардиной, П. С. Коркиной, А. В. Кухарь, Р. Д. Мустакимова, С. С. Мучкаевой, М. В. Мячиной, О. В. Охметенко, Л. О. Рупаковой, Т. Е. Рымановой, О. В. Таракановой, Т. Г. Тикиной и др.

Анализ исследований этих авторов показывает, что они определяют три основных источника формирования интереса: содержание изучаемого материала, организация деятельности в процессе обучения и взаимоотношения между учителем и учеником, между учениками.

В содержании материала выделяют следующие средства и приемы: новизна материала, его доступность, использование историко-математического аспекта, знакомство с научными достижениями, практическая и прикладная значимость математики, межпредметные связи, наглядность и занимательность, эмоциональность, математическое моделирование.

Организация учебного процесса с целью формирования познавательного интереса подразумевает следующие формы работы: дидактические игры, поисковая и исследовательская деятельность, использование проблемного обучения,

применение ИКТ-технологий, различные формы самостоятельной работы, построение обучения на основе деятельностного подхода, различные формы внеклассной работы и др.

Взаимоотношения в классе должны быть выстроены таким образом, чтобы процесс обучения проходил в творческой атмосфере, психологически комфортных условиях, с учетом индивидуальных особенностей каждого ученика. Решающую роль в этом аспекте играет мастерство учителя.

Многими исследователями отмечено использование исторического материала в качестве одного из приемов активизации и развития интереса к математике. Так, например, исследование С. С. Мучкаевой посвящено развитию интереса учащихся через эстетический потенциал исторических задач и теорем с чертежом. Л. О. Рупакова рассматривает компьютерные технологии в качестве средства развития интереса на примере решения арифметических задач с элементами историзма. Ю. А. Дробышев предлагает использовать персоналистический компонент истории математики не только для мотивации обучения математике, но и «с целью формирования у воспитуемых качеств личности» [3, с. 39].

Однако в указанных работах использование исторического материала рассматривается в качестве одного из аспектов решения проблемы. Таким образом, из вышесказанного следует, что отсутствуют исследования, посвященные системному использованию всего многообразия историко-математического материала как средства формирования интереса при обучении математике. В связи с этим видится перспективным исследование данного направления.

Литература

1. *Никитин Н. Н.* Съезды преподавателей математики в России (историко-библиографический очерк) // Изв. АПН РСФСР.—1946, № 6.—С. 135–167.
2. Концепция развития математического образования в Российской Федерации.—URL: <http://минобрнауки.рф/документы/3894>.
3. *Дробышев Ю. А.* О реализации стратегии развития воспитания средствами истории математики // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы и перспективы. Сб. статей XIII Междунар. науч.-практ. конф. «Артемовские чтения».—Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2017.—С. 36–39.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
В РОСТОВЕ-НА-ДОНУ (1917–2017)

Ю. С. Налбандян

(Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Переезд Варшавского университета в Ростов-на-Дону в 1915 г. стал значимым событием в жизни крупного южного города, в котором до этого момента не было ни одного научно-учебного заведения, ни одного человека с ученой степенью и званием. Коллектив университета, наряду с решением задач по налаживанию учебного процесса, активно включился в работу с учителями и в организационную и научно-просветительскую деятельность — в кратчайшие сроки были созданы Высшие Женские курсы с тремя факультетами, Археологический институт, Народный университет, Коммерческий институт (подробности см. в [1]). Вскоре стало ясно, что о возвращении в Варшаву речи быть не может, и надо готовиться к закреплению учебного заведения в Ростове, к тому, что, как писали в своих предложениях представители физико-математического факультета, «новый ростовский университет создается как будущий рассадник просвещения в обширном и богатом юго-восточном крае . . . навсегда» (Государственный архив Ростовской области (ГАРО), ф. 527, опись 1, № 2, л. 41). А вскоре университет столкнулся еще с одной проблемой — с реформой образования вообще и математического образования в частности.

В докладе, опирающемся на архивные материалы, собранные в свое время Маргаритой Бабкеновной Налбандян, предполагается остановиться на следующих моментах.

1. Анализ реформ, проведенных к сентябрю 1917 г. в связи «с преобразованием Варшавского в Донской университет» (на основе «Записки» профессора Дмитрия Дмитриевича Мордухай-Болтовского, хранящейся в ГАРО, ф. 527, опись 1, № 310, лл. 23–25). Здесь представляют интерес сравнение с событиями, происходящими в Петроградском и Московском университетах, а также некоторые вопросы организационного и педагогического характера (в частности, обоснование опасности «предметной системы», которую студенты понимают как «сдавай что хочешь и когда угодно», и доказательство необходимости перехода от «разрушительной работы» к созидательной — «руководствуясь не тактическими соображениями, а исключительно педагогическими и психологическими соображениями, со статистическими данными в руках» и т. п.). Заслуживает внимания призыв Д. Д. Мордухай-Болтовского к осторожности при проведении преобразований: *«Методы преподавания выработаны многолетним опытом, они так выкристаллизовались, что относящиеся к ним реформы должны хорошо продуматься».*

2. Изменения в преподавании математических дисциплин, в учебной нагрузке, в содержании основных и специальных математических курсов в первые

годы работы университета в Ростове-на-Дону, а также в организации отчетности студентов. Основой для разбора произошедшей реорганизации стало замечание Д. Д. Мордухай-Болтовского о том, что *«университет должен задаваться целью не только сообщения определенной суммы знаний, относящихся к факультетскому циклу наук, но и давать пищу для научной работы молодых ученых, гармонически соединяя педагогические цели с научными»* (ГАРО, ф. 527, опись 1, № 448, д. 258). Именно этот подход и анализ различных документов, таких как рапорт «Распределение предметов математического отделения Физико-математического факультета Донского университета по группам и специальностям», расписание занятий, программы учебных курсов, дает возможность оценить все нововведения и понять, сумели ли университетские преподаватели решить ряд вопросов, например, добиться того, что *«должны читаться специальные <курсы>, подходящие к неисследованным областям, которые преимущественно служат источниками тем кандидатских диссертаций и других научных студенческих работ»*.

3. Некоторые организационные моменты (возрастающая роль практических занятий, изменения в контингенте студентов, роль математической предметной комиссии и Совета факультета, вопросы педагогической этики). Среди прочего предпринимается также попытка сравнить количество и степень подготовленности студентов в разные годы и понять причины регулярных сожалений преподавателей о том, что *«трудности, которые встречаются при прохождении различных математических предметов, обуславливаются недостаточной подготовленностью студентов к слушанию этих предметов»*. Важным и актуальным представляется обсуждение Д. Д. Мордухай-Болтовским и его коллегами вопросов о том, какие темы необходимо разбирать на заседаниях предметных комиссий, а какие — на Совете факультета (в частности, в исследуемых документах речь идет о принципах распределения курсов между преподавателями, об организации контроля за учебной деятельностью студентов, который должен быть единообразным для всех дисциплин и т. д.).

4. Подход Д. Д. Мордухай-Болтовского к чтению различных математических курсов (геометрия, математический анализ и другие).

Литература

1. Белозеров С. Е. Очерки истории Ростовского университета.—Ростов н/Д.: Изд-во Рост. ун-та, 1959.—362 с.

ЗАДАЧА С ПАРАМЕТРАМИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ МЕТАПРЕДМЕТНЫХ УМЕНИЙ

Л. П. Охват

(Россия, Владикавказ; СОШ № 1 ст. Архонская)

Одной из наиболее трудных заданий ЕГЭ по математике на сегодняшний день является задача с параметрами. Задачи, в ходе решения которых, необходимы владение математическими методами и навыки исследовательского характера. Многие выпускники даже не приступают к решению этого вида заданий. Причиной тому служит недостаточное внимание к задачам с параметрами в школьном курсе из-за нехватки часов. Пытаясь исправить сложившееся положение, учителя предлагают элективный курс для желающих на старшей ступени обучения. Но развитие умений наблюдать и анализировать, выдвигать и доказывать гипотезы, обобщать и устанавливать причинно-следственные связи, применять и преобразовывать символы и знаки, принимать самостоятельные решения и выбирать оптимальный путь выхода из проблемы; формирование логического мышления и математической культуры должно происходить для всех обучающихся и на протяжении всего школьного курса математики. Поэтому хочу предложить, на мой взгляд, наиболее подходящий выход из сложившейся ситуации. А, именно, предлагаю строить уроки обобщения и систематизации знаний по изученной теме на основе некоторых задач с параметрами, соответствующих этой теме.

Так на последнем уроке по теме «Линейные уравнения» семиклассникам можно предложить выполнить следующее задание: «Из уравнений $0 \cdot x = 2$, $3(2x - 0,8) = 2(3x - 1,2)$, $2x + 3 = 5x - 1$, $5(2x + 0,4) - 3x = 7x - 2$ [1], $(2a - 4)x = 3a + 1$, $a^2x - 5a = 9x - 15$, $ax = b$ [3], $3x^2 - 4x + 5 = 0$ выбрать линейные и решить их».

Данное задание позволит не только отработать определение линейного уравнения: «Линейным уравнением с одним неизвестным x называют уравнение, левая и правая части которого есть многочлены степени не выше первой относительно x или числа» [2] и навыки его решения, но и даст всем детям возможность сформировать умения наблюдать, исследовать, делать выводы.

Литература

1. Алгебра. Дидактические материалы. 7 класс / М. К. Потапов, А. В. Шевкин, 4-е изд.— М.: Просвещение, 2009.—64 с.
2. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / А45 [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин].—М.: Просвещение, 2013—287 с.
3. *Высоцкий В. С.* Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ.—М.: Науч. мир, 2011.—316 с.

ТЕХНОЛОГИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ С СИНЕРГЕТИЧЕСКИМ ЭФФЕКТОМ В «ПРОБЛЕМНЫХ ЗОНАХ» ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИКТ¹

Е. И. Смирнов

(Россия, Ярославль; ЯГПУ)

1. Введение

Возможность постановки и решения проблем индивидуализации математического образования и мотивации к изучению математики как в школе, так и в вузе в современной России может быть основана на актуализации ведущих педагогических технологий и процессов адаптации сложного знания (в том числе, современных достижений в науке) к освоению математических методов наиболее доступными для этих целей средствами, приемами и отбором адекватного содержания обучения [1–2]. При этом достижение эффективности обучения математике возможно на основе проявления при этом синергетических эффектов и исследовательских подходов в ходе освоения учебной деятельности обучающимися в условиях создания насыщенной информационно-образовательной среды [3–4]. Школьнику при этом должен технологически осмыслить серию конкретных проблем или «проблемных зон» математики (также как и естественно-научных и гуманитарных проблем) как интегративных концентров актуальной информации, решаемых комплексом математических и информационных методов и технологий.

2. Методология и технологии

Применительно к обучению математике важнейшим компонентом в освоении предмета становится выявление и актуализация сложного математического знания и его сущности, проектирование и реализация сценариев и процедур на основе наглядного моделирования в контексте множественности целеполагания, выстраивания этапов и иерархий в направлении фундирования сущности [5], поиска и анализа побочных решений с использованием информационных технологий, выявление бифуркационных переходов и бассейнов притяжения в исследуемых процессах, когерентность информационных потоков в появлении нового продукта (в том числе, в условиях сетевого взаимодействия) [6–7]. В этом состоит суть первого (подготовительного) этапа технологии проявления синергии в математическом образовании. В работах Е. И. Смирнова выявлены и охарактеризованы этапы проявления синергии математического образования: подготовительный, содержательно-технологический, оценочно-коррекционный и обобщающе-преобразующий. В контексте выявления адекватных форм (ресурсные занятия; проектная деятельность; лабораторно-расчетные занятия; презентации);

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 1618-10304.

средств (статистические пакеты и офисные редакторы; малые средства информатизации; системы Web-поддержки; педагогические программные продукты; системы динамической геометрии и компьютерной алгебры); технологий (режим «warming up»; Web-квест; метод проектов; работа в малых группах; наглядное моделирование; фундирование опыта личности; компьютерное моделирование) характеризуются основные функциональные параметры, отражающие состояние обучающей системы (выявлено 7 параметров) и технологические характеристики деятельности школьника и педагога.

3. Дискуссия

Наиболее сензитивным периодом для процессов проявления синергетических эффектов в школьном обучении математике является старшая школа. Именно для данного возрастного периода эффективны диалог гуманитарной, информационной и естественнонаучной культур в обучении математике, интеллектуальная готовность к освоению многоступенчатых абстракций сложного знания, коммуникации в когерентном поле взаимодействий, равно как и актуализация этапов самоопределения, самоактуализации, самоорганизации и саморазвития личности. Адекватные формы математического образования в подготовительный период для проявления синергии сложного знания: ресурсные и лабораторно-расчетные занятия, проектная деятельность и т. п. могут быть реализованы с периодом в 2–3 месяца. При этом происходит насыщение информационных потоков разных дисциплин, которые обеспечивают доступность освоения школьниками этапов адаптации современного научного (или просто, сложного) знания к школьной математике. Актуализация знаний и методов других дисциплин (равно как и самой математики) должна быть обеспечена интегративными моделями когнитивной деятельности и соответствовать этапам освоения сложного знания на ресурсных занятиях. Одновременно реализуется диагностическая активность педагога по выявлению наличного состояния когнитивного опыта, личностных предпочтений и особенностей, терминальных ценностей и интеллектуального развития школьников. В данный подготовительный период желательно построение технологической карты ресурсной деятельности и динамические изменения в портфолио школьников.

Литература

1. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы / Под ред. В. Д. Шадрикова.—М.: Гардарики, 2002.—383 с.
2. Смирнов Е. И. Технология наглядно-модельного обучения математике.—Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1997.—323 с.
3. Хакен Г. Синергетика.—М.: Мир, 1980.—404 с.
4. Прайтген Х. О., Рихтер П. Х. Красота фракталов.—М.: Мир, 1983.—176 с.
5. Смирнов Е. И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога.—Ярославль: Канцлер, 2012.—654 с.
6. Кроиовер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории.—М.: Постмаркет, 2000.—352 с.
7. Фейгенбаум М. Универсальное поведение нелинейных систем // Успехи физ. наук.—1983.—Т. 141, № 3.—С. 343–374.

СИНЕРГИЯ ПОРЯДКОВЫХ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР В ПОДГОТОВКЕ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

В. А. Тестов

(Россия, Вологда; ВоГУ)

Одним из основополагающих принципов отбора содержания обучения математике, как в школе, так и в вузе, является принцип целостности содержания. В настоящее время при изучении математики этот принцип не всегда соблюдается, конкретный материал во многих случаях не складывается в систему знаний; учащийся чаще всего не в состоянии самостоятельно ее структурировать и осмыслить. Для формирования целостного представления о математике необходимо стремиться к единению различных взглядов на природу математики. Однако математикам трудно согласовать свои позиции, поскольку они рассматривают математику с различных точек зрения.

Как отмечается многими крупными учеными (Н. Бурбаки, А. Н. Колмогоров, Л. Д. Кудрявцев и др.), математика — это наука о специальных структурах, называемых математическими. Некоторые из математических структур могут являться непосредственными моделями реальных явлений, другие — связаны с реальными явлениями лишь посредством длинной цепи понятий и логических структур. Из такого взгляда на предмет математики вытекает, что в любом математическом курсе должны изучаться математические структуры.

Значительный вклад в систематизацию здания современной математики на базе основных математических структур внесла работа группы французских математиков, выступавших под псевдонимом Н. Бурбаки. Однако концепция математических структур сложилась еще на рубеже XIX и XX веков, широкие круги математиков познакомились с ней по «Основаниям геометрии» Д. Гильберта, первое издание которых вышло в 1899 г.

В своей аксиоматической основе математика представляется скоплением математических структур. Эти структуры, согласно Н. Бурбаки, подразделяются на три основных типа: алгебраические, порядковые и топологические. Но число три не является абсолютным, некоторые последователи Н. Бурбаки считают необходимым добавить в этот список проективные и метрические структуры.

Алгебраические структуры Н. Бурбаки [1, с. 252–253] охарактеризовал следующим образом. «Когда отношения в определении структуры являются «законами композиции» (это такое отношение между тремя элементами, которое однозначно определяет третий элемент как функцию первых двух), соответствующая структура называется алгебраической структурой . . . ». С современных позиций отношения (операции) в алгебраических структурах могут быть не только тернарными (бинарными), а иметь любую арность.

Представления о различных алгебраических структурах сложились в процессе исторического развития. Вначале люди научились совершать операции сложения и вычитания с наборами конкретных обыденных вещей, затем над числами (натуральными, рациональными, действительными). Позднее алгебраические операции стали производиться над более отвлеченными объектами

(векторами, преобразованиями и т. д.). При этом были выявлены общие свойства таких операций, что привело к возникновению абстрактных алгебраических структур (групп, колец, полей, векторных пространств и т. д.).

Другой важный тип представляют собой структуры, определенные отношением порядка; на этот раз это — отношение между двумя элементами x и y , которое чаще всего мы выражаем словами « x меньше или равно y ». Если говорить об истории порядковых структур, то еще в древности люди постоянно встречались с различными частными случаями упорядоченности. Сначала это было упорядочение привычных вещей и повседневных явлений. Позднее — по мере того, как совершенствовались трудовые навыки и мастерство — обнаруживалось упорядочение отдельных этапов в той или иной деятельности, и оно как приобретенный опыт передавалось из поколения в поколение. Люди постоянно упорядочивают предметы и явления по тому или иному признаку. При этом предполагается заданным некоторое множество предметов, между которыми установлено отношение «больше», «меньше», «предшествования», «старшинства» и т. п. Изучение общих свойств различных упорядоченных множеств и привело к возникновению абстрактных порядковых структур (цепей, вполне упорядоченных множеств, решеток, булевых алгебр и т. д.).

Если взглянуть на здание математики в целом, то в нем вместо традиционного разграничения на разделы (на алгебру, анализ, теорию чисел и геометрию) упорядочивающим принципом будет концепция иерархии структур, идущей от простого к сложному, от общего к частному. В центре находятся основные упомянутые выше типы структур, так сказать, порождающие структуры. В каждом из этих типов имеется уже достаточное разнообразие подструктур. За пределами этого первоначального ядра появляются структуры, которые можно было бы назвать сложными и в которые входят одновременно одна или несколько порождающих структур, но не просто совмещенные друг с другом (что не дало бы ничего нового), а органически скомбинированные при помощи одной или нескольких связывающих их аксиом. Примерами таких структур являются топологическая алгебра и упорядоченные алгебраические системы. Именно на таких перекрестках, когда встречаются несколько весьма различных структур, возникают наиболее крупные идеи в математике.

Школьники и студенты с синергетическим взаимодействием алгебраических и порядковых структур неоднократно встречаются при изучении математических курсов. В частности, такое взаимодействие происходит в теории натуральных чисел. С натуральными числами школьники знакомятся еще в первом классе и поэтому в силу их возрастных особенностей глубокие взаимосвязи порядковых и алгебраических свойств натуральных чисел остаются вне рамок школьной программы. Они могут быть изучены лишь в вузе в курсе «Числовые системы» в процессе подготовки учителей математики.

Более основательно с синергией алгебраических и порядковых структур учащиеся знакомятся при изучении теории неравенств. При этом в качестве исходных связывающих свойств надо рассматривать законы монотонности:

- i) для любых a, b и c $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$ (закон монотонности для сложения);
- ii) для любых a, b и любого положительного c $a < b \Rightarrow ac < bc$ (закон монотонности для умножения).

Из этих законов в качестве следствий нетрудно получить несколько простейших свойств неравенств, наиболее часто используемых:

- 1) $a + c \leq b + c \Rightarrow a \leq b$;
- 2) $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$;
- 3) $0 \leq a \Rightarrow -a \leq 0$;
- 4) $a \leq b$ и $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$;
- 5) $0 < a \leq b$ и $0 < c \leq d \Rightarrow 0 < ac \leq bd$;
- 6) $0 < a \leq b \Rightarrow 0 < a^2 \leq b^2$;
- 7) $a \leq b$ и $c < 0 \Rightarrow bc \leq ac$.

В доказательстве всех вышеперечисленных свойств, как можно заметить, не используется линейность порядка. Линейность порядка используется в доказательстве двух следующих свойств:

- 8) если $a \neq 0$, то $a^2 > 0$;
- 9) единица всегда больше нуля.

Чтобы усвоить взаимосвязь алгебраических и порядковых свойств, учащиеся должны научиться складывать неравенства, умножать их на положительные и отрицательные числа, перемножать неравенства (когда это возможно), возводить в квадрат.

Еще одним важным разделом математики, в котором ярко проявляются взаимосвязи алгебраических и порядковых свойств, является теория делимости. В более полном виде эта теория для натуральных (целых) чисел изучается в классах с углубленным изучением математики, либо на факультативных занятиях. В этой теории наиболее важными являются понятия наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного, взаимно простых чисел, простого и составного числа. Вершиной этой теории является основная теорема арифметики [3].

В вузовском курсе алгебры и теории чисел кроме теории делимости для целых чисел рассматривается теория делимости для кольца многочленов. Для рассмотрения этой теории в других алгебраических системах не остается времени. Между тем такая теория несложно строится для решеточно упорядоченных моноидов. Это можно сделать в специальном курсе «Упорядоченные алгебраические системы» для будущих учителей математики. В этом спецкурсе можно рассмотреть и новые результаты для упорядоченных квазигрупп и группоидов, обобщающие основную теорему арифметики [2, 4]. Оказывается, что порядковые свойства прямо влияют на алгебраические свойства. В частности, любой решеточно упорядоченный группоид является свободной абелевой группой.

Такой спецкурс помогает будущим учителям математики осознать синергию алгебраических и порядковых структур в математике.

Литература

1. Бурбаки Н. Архитектура математики // Очерки по истории математика.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1965.—С. 245–259.
2. Тестов В. А. Порядковые структуры в алгебре и теории чисел.—М.: МПГУ, 1997.—110 с.
3. Тестов В. А. Теория делимости и ее приложения к школьному курсу математики.—М.: МПГУ, 1997.—92 с.
4. Тестов В. А. Об аналоге основной теоремы арифметики в упорядоченных группоидах // Мат. заметки.—1997.—Т.62, № 6.—С. 910–915.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- Chechen AS** — Chechen Academy of Sciences
CINVESTAV-IPN — Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
ENS de Lyon — École Normale Supérieure de Lyon
HTW Dresden — Dresden University of Applied Sciences
IMM UrB RAS — Institute of Mathematics and Mechanics, the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
ЛИИ SB RAS — Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
MSU — Lomonosov Moscow State University
NISER — National Institute of Science Education and Research
NKU — Nankai University
SFEDU — Southern Federal University
SMI VSC RAS — Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Centre of Russian Academy of Sciences
TarSU — Taraz State University named after M. Kh. Dulaty
UrFU — Ural Federal University (Institute of Mathematics and Computer Science)
VETI NRNU “MEPhI” — Volgodonsk Engineering Technical Institute the Branch of National Research Nuclear University “MEPhI”
VSU — Voronezh State University
АлтГУ — Алтайский государственный университет
АН ЧР — Академия наук Чеченской Республики
БГУ — Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
БГЭУ — Белорусский государственный экономический университет
БелГУ — Белорусский государственный университет
БухГУ — Бухарский государственный университет
ВГТУ — Вьетнамский государственный технический университет имени Ле Куй Дона
ВГУ — Воронежский государственный университет
ВИ МВД — Воронежский институт МВД России
ВИТИ НИЯУ МИФИ — Волгодонский инженерно-технический институт (филиал) Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»
ВИУ — Владикавказский институт управления
ВНЦ РАН — Владикавказский научный центр Российской академии наук
ВоГУ — Вологодский государственный университет
ГФИ ВНЦ РАН — Геофизический институт — филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального научного центра «Владикавказский научный центр Российской академии наук»
ДГТУ — Донской государственный технический университет
ДГУ — Дагестанский государственный университет
ДНЦ РАН — Дагестанский научный центр Российской академии наук

ИГМ НАНУ — Институт гидромеханики Национальной академии наук Украины

ИПМ им. М. В. Келдыша — Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша Российской академии наук

ИПМА — Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук

КГУ им. К. Э. Циолковского — Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского

КГУ им. Н. А. Некрасова — Костромской государственный университет имени Н. А. Некрасова

КГЭУ — Казанский государственный энергетический университет

КНИИ РАН — Комплексный научно-исследовательский институт имени Х. И. Ибрагимова Российской академии наук

КНИТУ–КАИ — Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева (Казанский авиационный институт)

Концерн «Созвездие» — Акционерное общество «Концерн «Созвездие»

КрымФУ — Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского

МАИ (НИУ) — Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

МГПИ — Мордовский государственный педагогический институт имени М. Е. Евсевьева

МГУ — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

МУДО «ЦВР» — Муниципальное учреждение дополнительного образования «Центр внешкольной работы г. Зеленокумск Советского района»

МЭИ (НИУ) — Московский энергетический институт (национальный исследовательский университет)

МФТИ — Московский физико-технический институт (государственный университет)

НГУ — Новосибирский государственный университет

ННГУ — Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

НУУз — Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

ОГУ — Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева

ПГУ — Полоцкий государственный университет

ПензГУ — Пензенский государственный университет

РАНХиГС — Российская Академия Народного Хозяйства и Государственной Службы при Президенте Российской Федерации

РГЭУ (РИНХ) — Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)

СамГУПС — Самарский государственный университет путей сообщения

СибГАУ — Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева

СОГУ — Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова

СОШ № 1 ст. Архонская — МБОУ Средняя общеобразовательная школа № 1 имени Героя Советского Союза П. В. Масленникова ст. Архонская

СОШ № 27 — МБОУ Средняя общеобразовательная школа № 27
СОШ № 30 — МБОУ Средняя общеобразовательная школа № 30
СПИИРАН — Санкт-Петербургский институт информатики
и автоматизации Российской академии наук
СФ БашГУ — Стерлитамакский филиал Башкирского
государственного университета
ТИ им. А. П. Чехова — Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал)
«Ростовского государственного экономического университета (РИНХ)»
Тинькофф — Акционерное общество «Тинькофф Банк»
ТулГУ — Тульский государственный университет
Финансовый университет — Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации
ЧГПУ — Чеченский государственный педагогический университет
ЧГУ — Чеченский государственный университет
ЮГУ — Югорский государственный университет
ЮМИ — Южный математический институт — филиал Федерального
государственного бюджетного учреждения науки Федерального научного
центра «Владикавказский научный центр Российской академии наук»
ЮРГПУ (НПИ) — Южно-Российский государственный политехнический
университет имени М. И. Платова (Новочеркасский
политехнический институт)
ЮФУ — Южный федеральный университет
ЯГПУ — Ярославский государственный педагогический университет
имени К. Д. Ушинского

**ПОРЯДКОВЫЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ:**

Тезисы докладов
XIV Международной научной конференции
(с. Цей, 3–8 июля 2017 г.)

*Компьютерная верстка: М. У. Вазагаева
Зав. редакцией: В. В. Кибизова*

ЮМИ ВНЦ РАН
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

ISBN 978-5-904695-38-5



9 785904 695385