Владикавказский педагогический математический марафон – 2022

Линейные оптимизационные модели: адаптация сложного знания к школьной математике

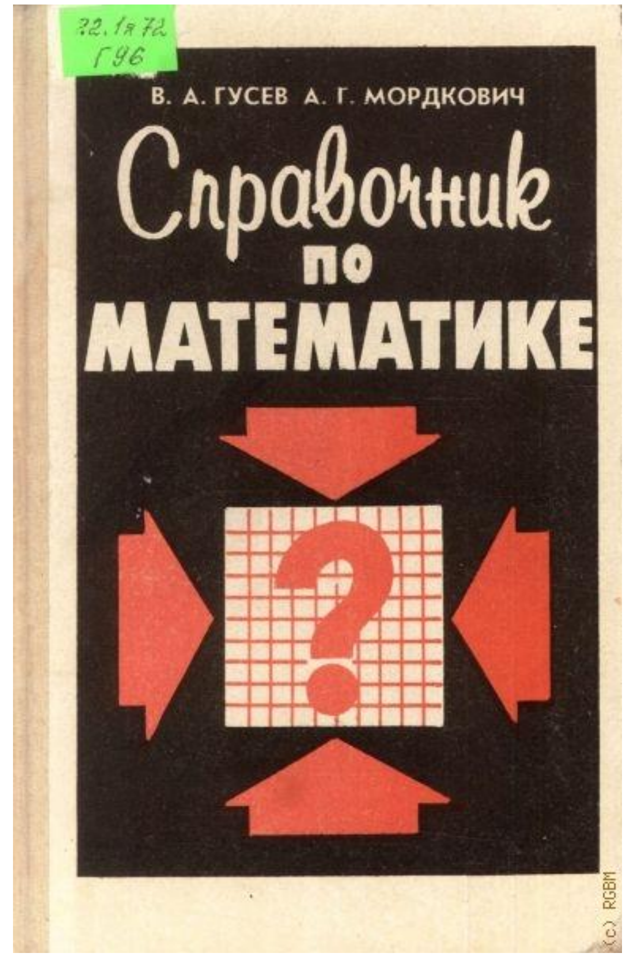
к.пед.н. В. С. Абатурова
(СКЦМИ ВНЦ РАН, ЮМИ ВНЦ РАН)

18.02.2022, Владикавказ

Цели обучения математике в современной школе

- *Развитие умения строить математические модели реальных явлений и процессов, осуществление математических экспериментов, формирование мировоззрения личности, развитие устойчивого интереса к приобретению научного взгляда на процессы развития природы и общества, понятийное мышление, способность отстаивать свои взгляды и убеждения, ясное представление об истории, происхождении и развитии знаний.*

д.пед.н., профессор Гусев В.А.



ФГОС основного общего образования

Требования к личностным предметным результатам обучающихся:

- *предпосылки научного типа мышления;*
- *виды деятельности по получению нового знания, его интерпретации, преобразованию и применению в различных учебных ситуациях, в том числе при создании учебных и социальных проектов.*

Ценности научного познания:

- *ориентация в деятельности на современную систему научных представлений об основных закономерностях развития человека, природы и общества, взаимосвязях с природой и социальной средой;*
- *овладение основными навыками исследовательской деятельности.*

Научный метод

Этапы	Алгоритм метода математического моделирования при решении задач	Алгоритм научного метода решения задач
1.	постановка проблемы (работа по созданию предмодели)	постановка задачи;
2.	анализ данных задачи, поиск закономерностей	наблюдения, эксперименты; анализ результатов, поиск закономерностей;
3.	формализация проблемы, построение модели;	выдвижение гипотезы;
4.	внутримодельное решение;	построение теории;
5.	интерпретация модели;	проверка гипотезы, выводы;
6.	проверка адекватности модели;	
7.	чувствительность модели (построение модифицированной предмодели).	принятие гипотезы, в случае её подтверждения (задача решена) или непринятие гипотезы и возвращение ко второму этапу алгоритма (продолжение решения задачи).

Линейное программирование

Леонид Витальевич Канторович

Лауреат Нобелевской премии по экономике «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов»

6 (19) января 1912, Санкт-Петербург – 7.04.1986, Москва

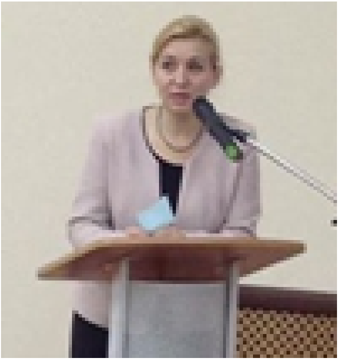
В 1939 году опубликовал работу **«Математические методы организации и планирования производства»**, в которой описал задачи экономики, поддающиеся открытому им математическому методу и тем самым заложил основы линейного программирования.

Математическое моделирование школьникам 1. Линейные модели:

Учебное пособие / Институт прикладной математики и информатики. – Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО-А, 2007. – 112 с.

Автор – к.пед.н. Вера Сергеевна Абатурова

Научный редактор: д.ф.-м.н., профессор Анатолий Гергиевич Кусраев



В.С.Абатурова

А.Г.Кусраев

Учебный план элективного курса «Математическое моделирование – школьникам. Линейные модели»

№	Тема	Количество часов
1.	**Предмет математического моделирования.** Классификация моделей. Моделирование в школьном курсе математики: текстовые задачи.	**1 (2)**
2.	**Линейные функции и линейные уравнения**	**3 (6), в том числе:**
2.1.	Лекция. Функции и графики. Линейная функция	1 (2)
2.2.	Лекция. Линейное уравнение с двумя неизвестными. Системы линейных уравнений с двумя неизвестными	1 (2)
2.3.	Практическое занятие.	1 (2)

Учебный план элективного курса «Математическое моделирование – школьникам. Линейные модели»

3.	**Линейные неравенства**	**2 (4), в том числе:**
	Лекция. Полуплоскость. Линейные неравенства с двумя неизвестными. Системы линейных неравенств с двумя неизвестными	1 (2)
3.2.	Практическое занятие. Решение упражнений по теме	1 (2)
4.	**Некоторые линейные модели**	**3 (7), в том числе:**
4.1.	Практическое занятие. Текстовые задачи, приводящие к линейным уравнениям и их системам.	1 (2)
4.2.	Лекция. Модель равномерного прямолинейного движения. Модель рыночного равновесия. Модель национального дохода.	1(2)
4.3.	Практическое занятие. Решение задач	1(2)
	Контрольная работа	1
5.	**Элементы линейного программирования**	**4 (5), в том числе**
5.1.	Лекция. Общая характеристика задач линейного программирования. Из истории линейного программирования.	1 (1)
5.2.	Практическое занятие. Задача «двух картошек». Графический способ решения задачи «двух картошек»	1 (1)
5.3.	Практическое занятие. Задача о рационе. Графический способ решения задачи о рационе. Крайние точки	1 (1)
5.4.	Практическое занятие. Решение задач	1 (2)

Учебный план элективного курса «Математическое моделирование – школьникам. Линейные модели»

6*.	**Симплекс-метод в линейном программировании** Построение начального базисного решения. Улучшение базисного решения.	- (2)
7*.	**Задача распределения ресурсов** Решение задачи распределения ресурсов симплекс-методом.	- (2)
8*.	**Общая задача линейного программирования.**	- (1)
9*.	**Двойственная задача.**	- (2)
	Решение задач	- (2)
	Итоговая контрольная работа	1 (1)
	ИТОГО	**14 (34)ч.**

Задача линейного программирования

Задачей линейного программирования (ЗЛП) называется задача нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции от нескольких переменных при линейных ограничениях на эти переменные.

$$\boxed{f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max}$$ целевая функция

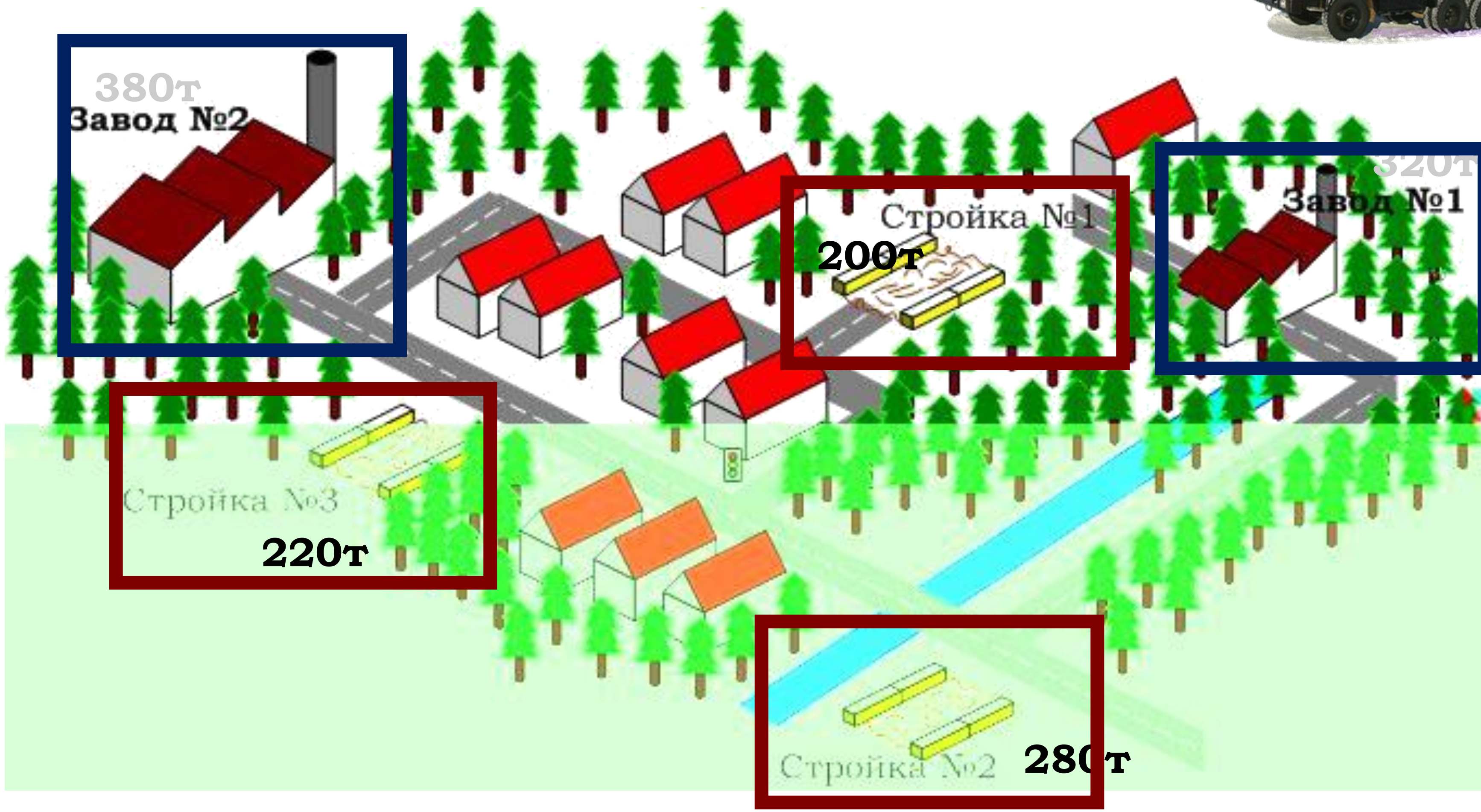
$$\boxed{\begin{cases} x_1 + x_2 \le 127 \\ 7x_1 - x_2 \le 83 \end{cases}}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

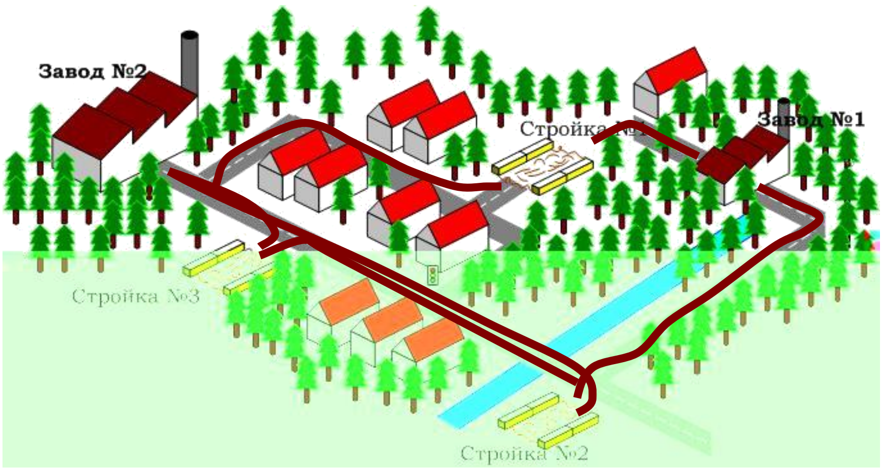
система ограничений

Примеры простейших задач линейного программирования

Задача 1. Минимизация стоимости перевозок



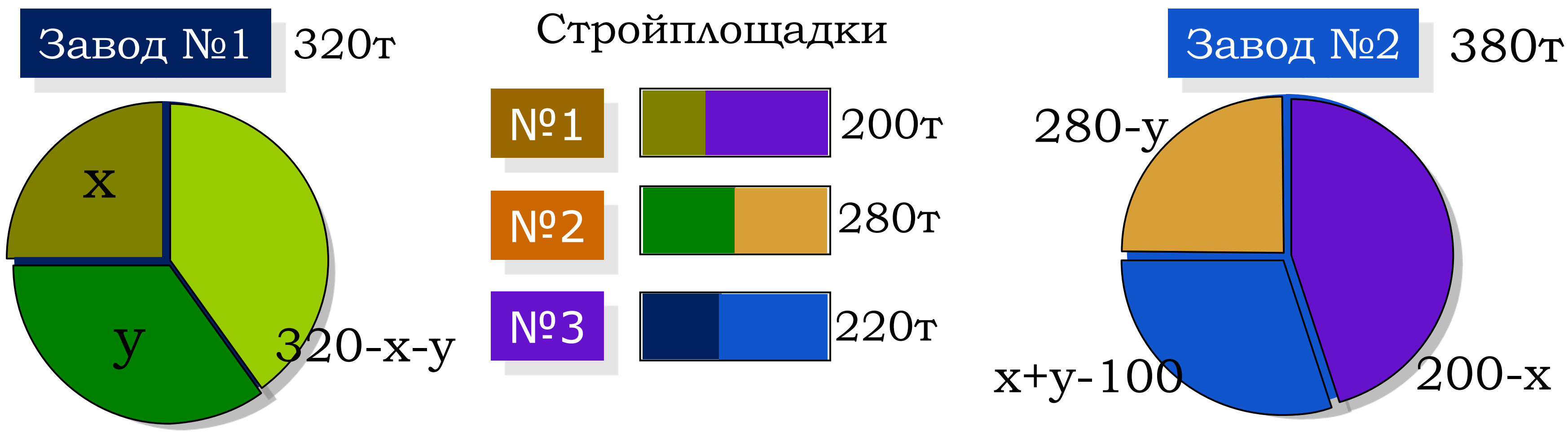
Задача 1. Анализ условия



Стоимости перевозок

С пл. / Завод	№1	№2	№3
№1	2	4	6
№2	4	5	3

Задача 1. Ограничения



План перевозок

стр.пл. / завод	№1	№2	№3
№1	x	y	320-x-y
№2	200-x	280-y	x+y-100

Задача 1. Построение целевой функции

Стоимость перевозок

С.пл. / зав.	№1	№2	№3
№1	2	4	6
№2	4	5	3

План перевозок

С.пл. / зав.	№1	№2	№3
№1	x	y	320-x-y
№2	200-x	280-y	x+y-100

Стоимость запланированных перевозок

$$f(x,y) = 2x + 4y + 6(320-x-y) + 4(200-x) + 5(280-y) + 3(x+y-100) =$$

$$= 3820 - 5x - 4y$$

Задача 1. Линейная оптимизационная модель

$$f(x,y) = 3820 - 5x - 4y \rightarrow min$$

Целевая функция

$$\begin{cases} 320 - x - y \geq 0 \\ 200 - x \geq 0 \\ 280 - y \geq 0 \\ x + y - 100 \geq 0 \end{cases}$$

Система ограничений

$$x \geq 0, \; y \geq 0$$

Ограничения неотрицательности

Задача 2. Максимизация прибыли

Задача 2. Максимизация прибыли. Построение целевой функции

			Запас ресурса
Ресурс1	4	6	24
Ресурс2	3	2	12
Ресурс3	1	1	8
Прибыль	4	5	

x – число выпускаемых табуреток

y – число выпускаемых стульев

Суммарная прибыль от реализации всей продукции

$$f(x,y) = 4x + 5y \rightarrow max$$

Цель задачи – максимизация прибыли

Задача 2. Ограничения

Расход ресурса ≤ Запас ресурса

			Запас ресурса
Ресурс1	4	6	24
Ресурс2	3	2	12
Ресурс3	1	1	8
Прибыль	4	5	

$$\boxed{4x + 6y} \le 24$$

$$3x + 2y \le 12$$

$$x + y \le 8$$

Задача 2. Линейная оптимизационная модель

$f(x,y) = 4x + 5y \to max$

Целевая функция

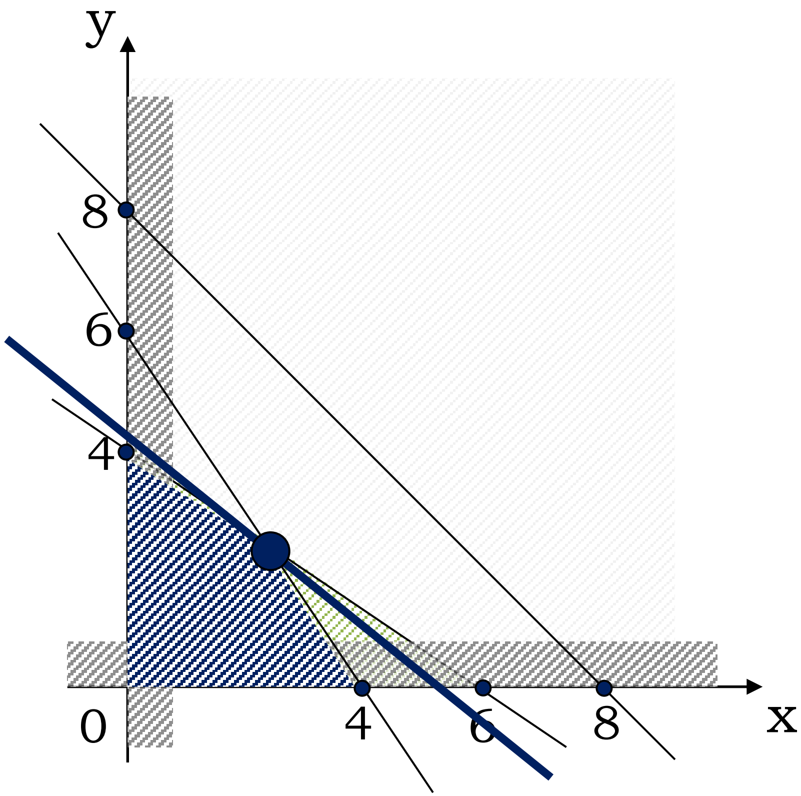
$$\begin{cases} 4x + 6y \le 24 \\ 3x + 2y \le 12 \\ x + y \le 8 \end{cases}$$

Система ограничений

$x \ge 0, \ y \ge 0$

Ограничения неотрицательности

Задача 2. Графический метод решения



$$f(x,y) = 4x + 5y \to max$$

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

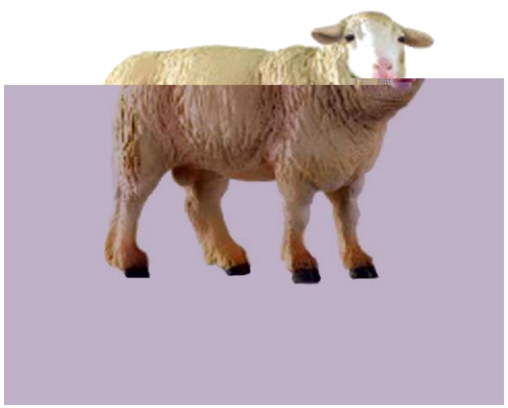
$$\begin{cases} 4x + 6y \leq 24 \\ 3x + 2y \leq 12 \\ x + y \leq 8 \end{cases}$$

$$x = \frac{12}{5} \quad y = \frac{12}{5} \quad f = \frac{108}{5}$$

Вывод: наиболее выгодно выпускать табуретки и стулья в одинаковом количестве.

Задача 3. Составление оптимального рациона. Минимизация расходов

Предположим, что в дневной рацион животных должны входить питательные вещества двух видов в количестве, заданном в таблице. Имеется возможность составлять рацион из кормов двух видов, для которых задано содержание питательных веществ в единице корма и цена одной единицы каждого из видов кормов. При удовлетворении условий по необходимому содержанию питательных веществ в данном рационе требуется достичь его минимальной стоимости.



	Корм1	Корм2	Доля питат. веществ в рационе
Пит. в-во1	2	1	12
Пит. в-во2	6	4	30
Цена корма	5	2	

Задача 3. Математическая модель

$$f(x, y) = 5x + 2y \to \min$$

$$\begin{cases} 2x + y \geq 12 \\ 6x + 4y \geq 30 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Задача 4. Максимизация прибыли

На фабрике для производства двух видов продукции используются три вида сырья. Оно имеется на фабрике в следующих количествах: 13 единиц вида А, 9 единиц вида В и 8 единиц вида С. На производство первого вида продукции надо израсходовать (2; 0; 2) единиц указанных видов сырья, а для второго вида продукции эти показатели равны (2; 3; 0). Прибыль, получаемая фабрикой от реализации первого вида продукции, равна 3 условным единицам, а от реализации единицы продукции второго вида равна 4 таким же единицам. Составить математическую модель работы фабрики, чтобы обеспечить наибольшую прибыль.

Задача 4. Математическая модель

$$f(x, y) = 3x + 4y \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x + 2y \le 13 \\ 3y \le 9 \\ 2x \le 8 \end{cases}$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

Задача 5. Минимизация стоимости расходов

На животноводческой ферме производится откорм скота. Пусть известно, что каждому животному надо ежедневно выдать не менее 6 единиц вещества А, 8 единиц вещества В и 12 единиц вещества С (этими веществами могут быть, например, белки, жиры и углеводы). Для откорма животных можно закупить два вида кормов (например, жмых и комбикорм). Единица веса первого корма содержит 21 единицу вещества А, 2 единицы вещества В и 4 единицы вещества С, а стоимость ее равна 3рублям. Для второго вида кормов соответствующие цифры равны 3; 2; 2 и 2рублям. Составьте математическую модель процесса, при котором была бы обеспечена суточная потребность в веществах А, В С, причем стоимость его была бы наименьшей.

Задача 5. Математическая модель

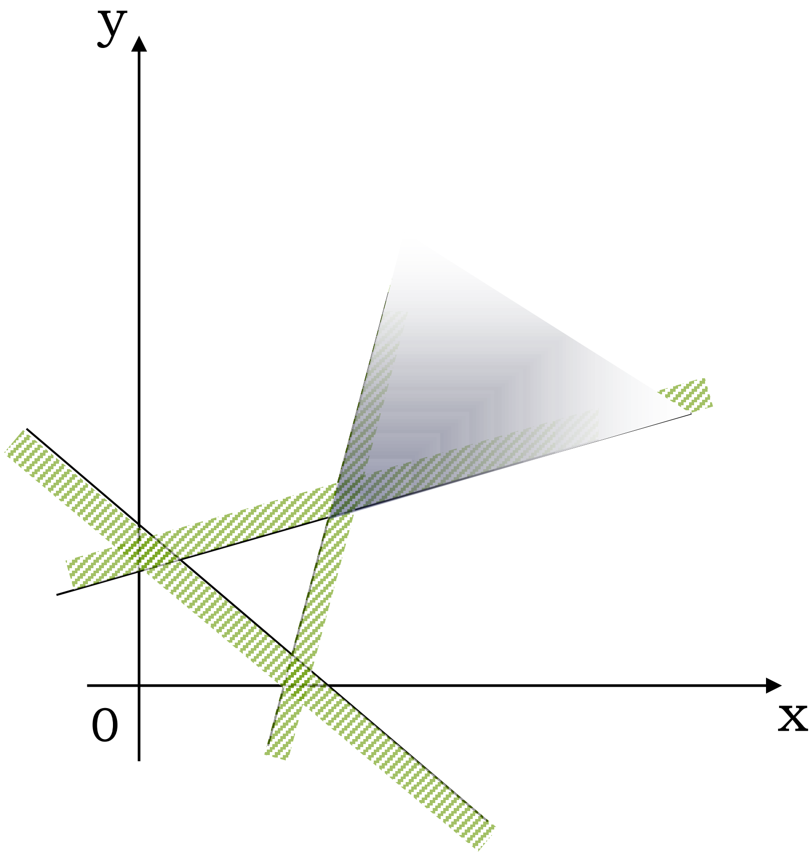
$$f(x,y) = 3x + 2y \to \min$$

$$\begin{cases} 21x + 3y \geq 6 \\ 2x + 2y \geq 8 \\ 4x + 2y \geq 12 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

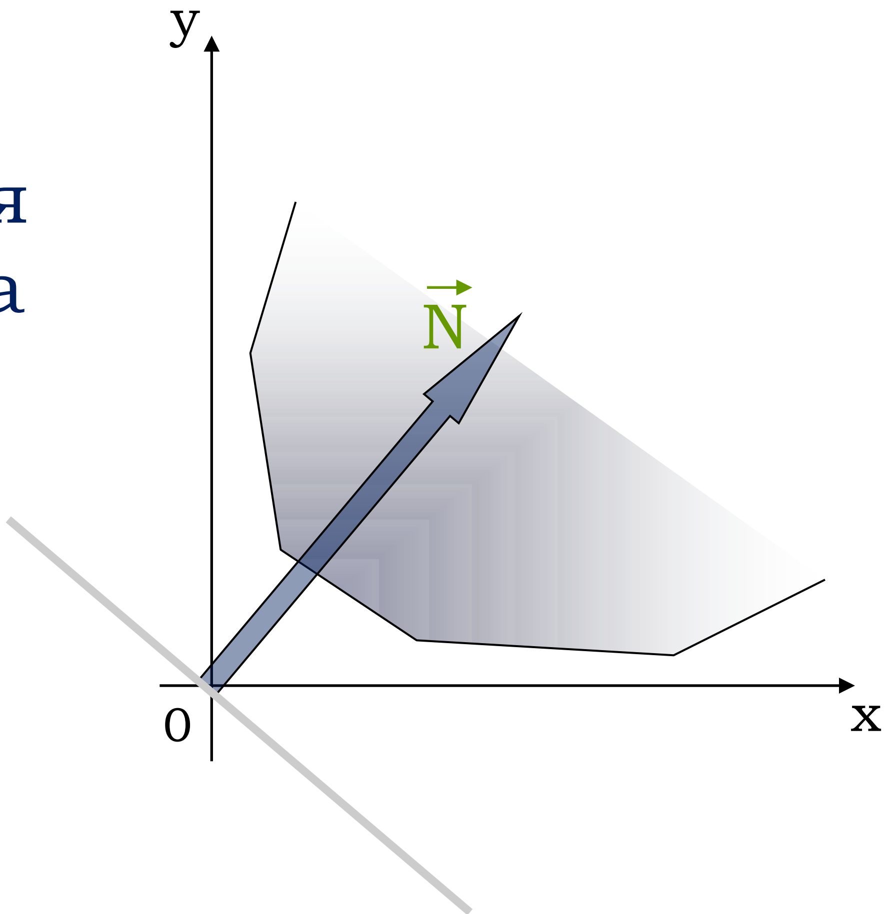
Неразрешимость задачи линейного программирования. Случай 1

Система ограничений не имеет ни одного решения



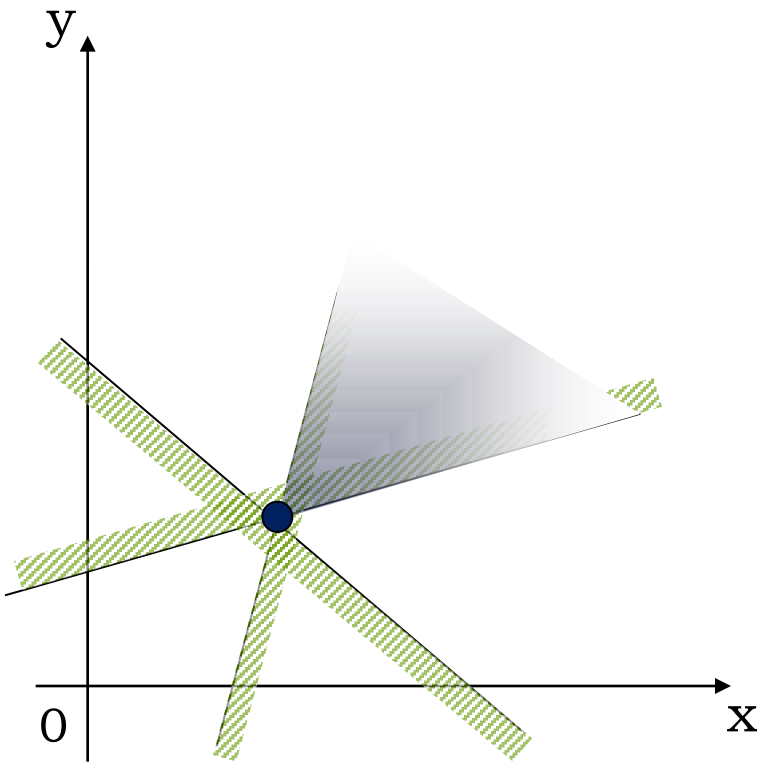
Неразрешимость задачи линейного программирования. Случай 2

- Целевая функция не ограничена на множестве решений



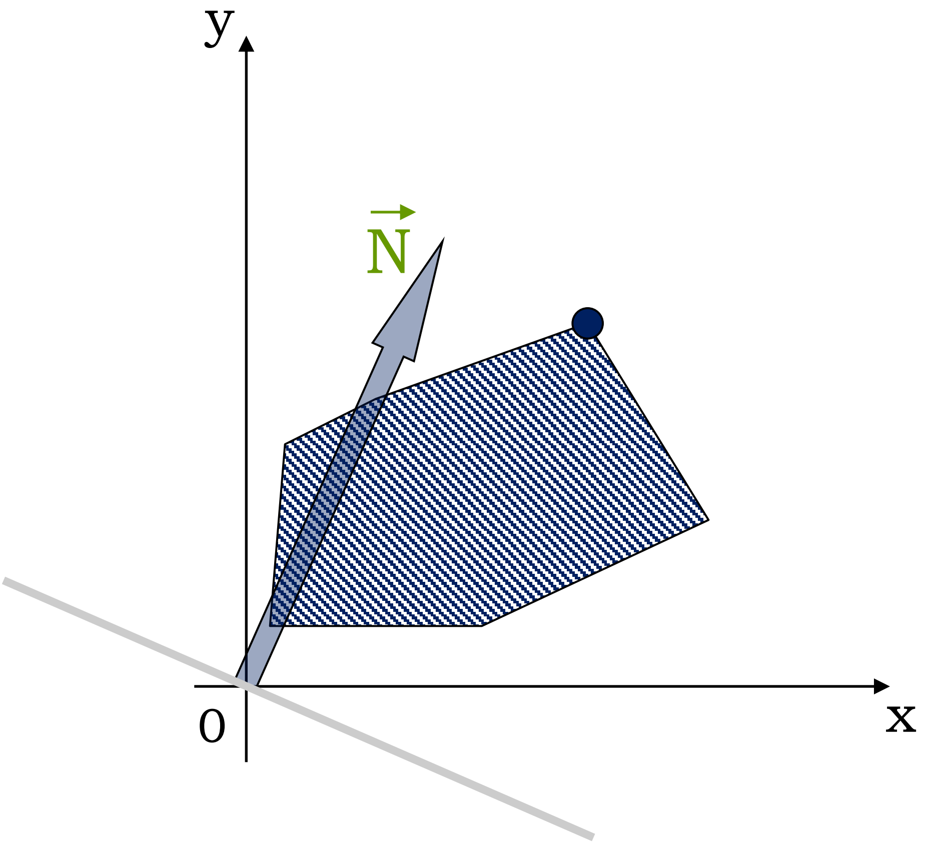
Разрешимость задачи линейного программирования. Случай 1

- Множество решений состоит из одной точки



Разрешимость задачи линейного программирования. Случай 2

- Единственное оптимальное решение ЗЛП

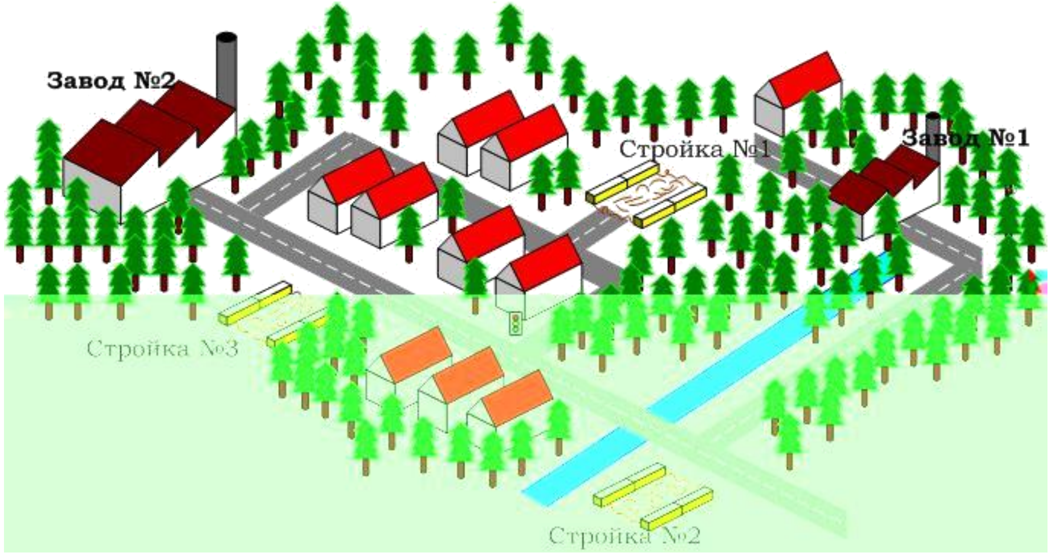


Задание. Решить графически линейную оптимизационную модель задачи 1.

$$f(x,y) = 3820 - 5x - 4y \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 320 - x - y \geq 0 \\ 200 - x \geq 0 \\ 280 - y \geq 0 \\ x + y - 100 \geq 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0, \ y \geq 0$$



Спасибо за внимание!