О полугруппе линейных отношений

Чшиев А.Г. (Владикавказ)

Южный математический институт ВНЦ РАН

e-mail: zchaslan@mail.ru

Пусть X - комплексное банахово пространство. Через $EndX$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в X. Множество всех линейных отношений на X обозначим через $LR(X)$.

Определение. *Полугруппой линейных отношений* на подпространстве $X_0 \subset \mathrm{X}$ называется функция $S : (0, \propto) \to LR(X)$ со свойством

$$S(t+s)x = S(t)S(s)x, t, s > 0,$$

для любого $x \in X_0$ Функция S называется полугруппой линейных отношений, если $X_0 = X$.

Определение. *Траекторией точки* x относительно полугруппы линейных отношений S на подпространстве X_0 называется векторная функция $\xi_x : [0, \infty) \to X$ со свойствами $\xi_x(0) = x$, $\xi_x(t) \in S(t)x, t > 0$.

Определение. *Инфинитезимальным линейным отношением* полугруппы линейных отношений S на подпространстве X_0 называется линейное отношение $G_0 \in LR(X)$, состоящее из пар $(x, y) \in X_0 \times X$ таких, что траектория ξ_x точки x дифференцируема и связана с траекторией точки y следующим образом: ${\xi_x}'(t) = \xi_y(t)$ для всех $t \geq 0$.

Определение. *Старшим генератором* полугруппы линейных отношений S на подпространстве X_0 называется линейное отношение $\mathbb{G} \in LR(X)$, состоящее из пар (x, y) со свойствами: $x \in D(\mathbb{G})$, где подпространство $D(\mathbb{G})$ состоит из векторов $x \in X_0$, для которых траектория ξ_x дифференцируема на $(0, \propto)$ и ${\xi_x}'(t) = \xi_y(t)$ для всех $t > 0$.

Определение. *Генератором* полугруппы линейных отношений S на подпространстве X_0 называется отношение $\mathcal{G} \in LR(X)$, удовлетворяющее условиям: 1) $G_0 \subset \mathcal{G} \subset \mathbb{G}$; 2) для каждых $(x, y) \in \mathcal{G}$ и $t > 0$ следует $(\xi_x(t) = \xi_y(t) \in \mathcal{G}$.

В работе через T и S обозначены соответственно полугруппы

$$T : (0, \propto) \to EndX \text{ и } S : (0, \propto) \to LR(X),\ S(t) = T(t)^{-1}.$$

Введем подпространство

$$Y_S = \cup_{t,s>0}\{T(s)y : y \in ImT(t)\} = \cup_{t,s>0}\{T(s)T(t)x : x \in X\}.$$

Теорема. Функция S есть сильно непрерывная в нуле справа полугруппа линейных отношений на подпространстве Y_S .

Теорема. Инфинитезимальное отношение (оператор) G_0 полугруппы S имеет вид $D(G_0) = Y_S \cap D(A_0), G_0 u = -A_0 u,$ где A_0 - есть инфинитезимальный оператор полугруппы T.

Теорема. Старший генератор полугруппы S имеет вид:

$$\mathbb{G} = \{(T(t)x, -T(t)y) : T(t)x \in Y_S, t > 0, \text{где } (x, y) \in \mathbb{A}\},$$

где $\mathbb{A}$ - старший генератор полугруппы T.

Теорема. Пусть $\mathcal{A}$ – генератор полугруппы T. Тогда линейный оператор

$$\mathcal{G} = \{(T(t)x, -T(t)y) : T(t)x \in Y\_S, t > 0, \text{где } (x, y) \in \mathcal{A}\}$$

является генератором полугруппы S.

Теорема. Пусть T - полугруппа непрерывно обратимых операторов, и пусть $\mathcal{A}$ – генератор полугруппы T. Тогда $-\mathcal{A}$ является генератором полугруппы S.

Литература

1. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э.Хилле, Р.Филлипс.- М.: ИЛ, 1962.

2. Баскаков А.Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов

с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения

и полугруппы разностных отношений/ А.Г.Баскаков// Изв. РАН.

Серия матем.- 2009.- Т.73.- №2.- С. 3–68.

3. Cross R. Multivalued linear operators/ R.Cross - New York: M. Dekker.- 1998.

4. Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces/ A.Favini, A. Yagi - New York: M. Dekker.- 1998.

5. Баскаков А.Г. Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов/ А. Г.~Баскаков//Матем. заметки- 2008.- Т.84.- №2.- С. 175-192.

6. 3. Hughes Rhonda Jo. Semigroups of Unbounded Linear Operators in Banach Space/Rhonda Jo Hughes// Transactions of the American Mathematical Society.- 1977 Vol. 230.- pp. 113-145.