ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР «ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

УТВЕРЖДЕНО:
Приказом директора ВНЦ РАН
№ 11-А от «20» мая 2022 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА ОБУЧЕНИЕ ПО ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ ПРОГРАММАМ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ – ПРОГРАММАМ ПОДГОТОВКИ НАУЧНЫХ И НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ КАДРОВ В АСПИРАНТУРЕ

Группа научных специальностей
1.1. Математика и механика

Научная специальность
1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Владикавказ, 2022

I. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Целью вступительного экзамена является определение уровня подготовки поступающего в аспирантуру по научной специальности **1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ**

Поступающий должен показать высокий уровень теоретической и профессиональной послевузовской подготовки, знание общих концепций и методических вопросов дисциплин специальности, истории их возникновения и развития, глубокое понимание основных разделов, а также умение применять свои знания для решения исследовательских и прикладных задач.

II. СТРУКТУРА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

Форма проведения вступительного экзамена: устно-письменная.

Продолжительность вступительного экзамена: 90 минут.

Вступительный экзамен состоит из трех вопросов. Ответы на вопросы предварительно излагаются письменно, затем докладываются устно.

Ответы должны быть представлены в виде грамотно изложенного, связного текста, позволяющего проследить логику рассуждений, лежащих в основе сделанных выводов.

При проведении устной части вступительного испытания члены Экзаменационной комиссии могут задавать дополнительные вопросы по теме билета.

Листы для ответов выдаются Экзаменационной комиссией, по окончании экзамена сдаются.

III. СОДЕРЖАНИЕ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

I. Математический анализ

1. Действительные числа. Точные границы числовых множеств. Принцип вложенных отрезков.
2. Предел последовательности. Критерий Коши. Последовательности и частичные пределы. Теорема Больцано - Вейерштрасса. Нижний и верхний предел.
3. Предел и непрерывность функции. Критерий Коши. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Классификация точек разрыва.
4. Теорема Вейерштрасса о точных границах. Теорема Больцано – Коши о промежуточных значениях. Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Непрерывность обратной функции.
5. Производная и дифференциал. Правила вычисления производных и дифференциалов (суммы, произведения, частного, сложной функции, обратной функции). Производные и дифференциалы высших порядков.
6. Локальный экстремум функции. Теорема Ферма. Теорема Роля, Лагранжа и Коши. Условия монотонности. Достаточные условия экстремума.
7. Критерий выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты. Правило Лопиталя.
8. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Формула Лагранжа и Коши для остаточного члена. Локальная формула Тейлора (остаток в форме Пеано).
9. Первообразная и неопределенный интеграл. Интегрирование по частям и замена переменной.
10. Интеграл Римана и его простейшие свойства. Признаки интегрируемости и классы интегрируемых функций. Формулы Ньютона-Лейбница. Теоремы о среднем. Геометрические и механические приложения.

11. Несобственные интегралы первого и второго рода. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса сходимости несобственного интеграла. Условная сходимость. Признаки Абеля и Дирихле.

12. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Теорема Коши о промежуточных значениях. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции нескольких переменных.

13. Частные производные, производная по направлению и дифференциал функции нескольких переменных. Дифференциалы высших порядков. Многомерная формула Тейлора.

14. Система неявных функций и условие ее локальной неразрешимости. Производные неявной функции. Теорема об обратном отображении.

15. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые условия локального экстремума. Достаточные условия локального экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

16. Римановы интегральные суммы. Определение кратного интеграла и его свойства. Классы интегрируемых функций. Сведение кратного интеграла к повторному. Замена переменной в кратном интеграле. Приложения.

17. Криволинейные и поверхностные интегралы первого и второго рода. Формулы Грина, Гаусса-Остроградского, Стокса. Элементы теории поля.

18. Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов. Признаки сходимости знакопеременных рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

19. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Теоремы о предельном переходе, непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости для функциональных последовательностей и рядов. Признаки равномерной сходимости (Вейерштрасса, Абеля и Дирихле) функционального ряда. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций.

20. Интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Признаки сходимости (Вейерштрасса, Коши, Абеля, Дини, Дирихле). Теоремы о пределе, непрерывности, дифференцировании и интегрировании собственных и несобственных интегралов, зависящих от параметра. Теорема о перестановке двух несобственных интегралов. Эйлеровы интегралы.

Литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления т.1-т3.
2. Зорич В.А. Математический анализ. Т1,2.

II. Комплексный анализ

1. Комплексное дифференцирование. Условие Коши-Римана. Геометрический смысл производной.
2. Комплексное интегрирование. Теорема Коши.
3. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Принцип максимума модуля. Теорема Морера.
4. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряд Тейлора. Теорема единственности аналитической функции. Теорема Лиувилля.
5. Ряд Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции. Элементы теории вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше.
6. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Точки ветвления и римановы поверхности.
7. Принцип аналитического продолжения. Теорема Римана.
8. Целые и мероморфные функции. Порядок и тип целой функции. Теорема Митагг - Лефлера.

Литература:

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитической функции.
2. Шабат В.В. Введение в комплексный анализ.

III. Функциональный анализ

1. Измеримые функции. Сходимость почти всюду и сходимость по мере. Теоремы Егорова и Лузина.
2. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега (теоремы Лебега, Леви, Фату). Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана. Теорема Фубини.
3. Метрические пространства, полнота. Теорема о вложенных шарах и категории. Теорема Бэра. Теорема о пополнении метрического пространства. Принцип сжимающихся отображений. Компактность.
4. Нормированные пространства и банаховы пространства. Пространство последовательностей, пространство непрерывных функций, Лебеговы пространства (полнота, общий вид ограниченного функционала). Пространство Соболева.
5. Гильбертовы пространства. Ортогонализация Гильберта-Шмидта. Теорема об ортогональном проектировании. Теорема Рисса об общем виде ограниченного функционала в гильбертовом пространстве. Теоремы Рисса-Шифера об изоморфизме. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.
6. Линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах. Непрерывность и ограниченность, норма оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Обратный оператор. Ряд Неймана. Теорема Банаха об обратном операторе. Теоремы об открытом отображении и замкнутом графике. Теорема Банаха-Штейнгауза.
7. Теорема Хана - Банаха. Теоремы отделимости. Сопряженное пространство и сопряженный оператор. Слабая сходимость. Сопряженные, унитарные и нормальные операторы.
8. Компактные множества в нормированных пространствах. Критерий компактности. Компактные операторы (общие свойства, примеры). Фредгольмовы операторы и теорема Никольского. Альтернатива Фредгольма.

Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа.
3. Канторович В.Л., Акилов Г.П. Функциональный анализ.
4. Треногин Х.Х., Функциональный анализ.

IV. Геометрия

1. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Полярная система координат на плоскости. Цилиндрическая и сферическая системы в пространстве. Связь полярных, сферических и цилиндрических координат с декартовыми.
2. Векторы. Координаты вектора. Линейная зависимость и базисы. Преобразования координат вектора при замене базиса. Скалярное произведение и его свойства.
3. Ориентация. Векторное произведение двух векторов, смешанное произведение трех векторов и их свойства. Выражение в прямоугольных координатах.
4. Прямая на плоскости и в пространстве (различные уравнения прямой, расположения прямых, расстояние от точки до прямой, угол между прямой и плоскостью).
5. Плоскость в пространстве (различные уравнения плоскости, взаимное расположение плоскостей, расстояние от точки до плоскости, угол между двумя плоскостями).

6. Линии второго порядка. Фокусы, асимптоты, оптические свойства. Парабола. Эллипс. Гипербола. Аффинная классификация поверхностей второго порядка.
7. Поверхности второго порядка. Эллипсоид. Параболоиды. Гиперболоиды. Цилиндры. Конусы. Аффинная классификация поверхностей второго порядка.
8. Кривизна кривой. Формулы Френе. Соприкасающаяся плоскость. Главная нормаль и бинормаль. Кручение кривой. Теорема о задании кривой нормальными уравнениями.
9. Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Универсальная связь между квадратичными формами поверхности.

Литература

1. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия.
2. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия.

V. Алгебра

1. Комплексные числа. Тригонометрическая форма записи. Геометрическая интерпретация. Формула Муара. Корни из 1.
2. Комплексные многочлены. Делимость многочленов (алгоритм деления с остатом, наибольший общий делитель, алгоритм Евклида). Теорема Безу. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Теорема о существовании корня комплексного многочлена.
3. Определители и их свойства. Минор и алгебраическое дополнение минора. Теорема Лапласа. Формулы Крамера.
4. Линейные пространства, примеры. Базис и размерность пространства. Преобразование координат вектора при замене базиса. Подпространство, прямое дополнение, фактор - пространства.
5. Теорема о ранге матрицы. Критерий совместимости системы линейных уравнений (теорема Кронекера-Каплли). Однородные системы (пространство решений, фундаментальная система решений). Общее решение системы линейных уравнений.ъ
6. Изоморфизм алгебры линейных преобразований с алгеброй матриц. Образ, ранг и дефект линейного преобразования (инвариантные подпространства).
7. Корневые векторы и корневые подпространства. Корневое разложение. Жордановы базисы линейного преобразования. Жорданова нормальная форма матрицы. Теорема о существовании жорданова базиса. Функции от матрицы.
8. Евклидовы и унитарные пространства. Ортогонализация Грамма-Шмидта. Ортогональные и симметрические преобразования.
9. Квадратичные формы. Линейная замена переменных в квадратичной форме. Приведение к каноническому виду. Закон инерции действительной квадратичной формы. Положительно определенные формы.
10. Обзор алгебраических структур (группы, кольца, поля).

Литература:

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.
2. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры.
3. Гельфант И.М. Лекции по линейной алгебре.

VI. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

1. Существование и единственность решений дифференциальных уравнений. Теоремы Пеано, Пикара и Осгуда.

2. Уравнения и системы уравнений с аналитической правой частью. Теорема Коши существования и единственности. Решение уравнений с помощью систем.
3. Линейные уравнения, системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Формула Лиувилля -Остроградского. Метод вариации постоянных.
4. Непрерывность и дифференцируемость решений диф. уравнений по параметру и по начальным данным.
5. Краевая задача для обыкновенного диф. уравнения. Функция Грина. Собственные значения и собственные функции. Задача Штурма-Лиувилля.
6. Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема о неустойчивости.
7. Автономные системы на плоскости. Устойчивое положение равновесия. Предельные точки, предельные множества, предельные циклы. Классификация линейных систем (узел, фокус, седло, центр).

Литература:

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных диф. уравнений.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные диф. уравнения.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные диф. уравнения.